线性代数习题课（12月13日）

环及其理想

设 R 是一个环，S 为 R 的一个子集，若满足：

1) $\forall x, y \in S \Rightarrow x-y \in S$

2) $\forall x, y \in S \Rightarrow xy \in S$

则称 S 为 R 的子环.

例 ① 由所有偶数构成的集合为 $\mathbb{Z}$ 的子环

② 由所有上三角矩阵构成的集合为 $M_n(\mathbb{R})$ 的子环

③ $\mathbb{R}[x^2]$ 是 $\mathbb{R}[x]$ 的子环

定义（理想）

设 R 是一个环，S 为 R 的一个子集，若满足：

1) $\forall a, b \in S \Rightarrow a-b \in S$

2) $\forall \overset{\in R}{a}, b \in S \Rightarrow ab \in S$ （2)′ $\forall a \in R, b \in S \Rightarrow ba \in S$)

则称 S 为 R 的左理想（右理想）. 若 R 为交换环，则称 S 为 R 的理想.

若 S 既为 R 的左理想，又为 R 的右理想
则称 S 为 R 的理想.

例 ① $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 为 $\mathbb{Z}$ 的一个理想

更一般地，$m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 为 $\mathbb{Z}$ 的一个理想

② 设 R 为所有关于 x 系数在 $\mathbb{R}$ 中的多项式集合 $\mathbb{R}[x]$.
R 是一个交换环. 所有形如：$a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \ (n \geq 1)$
的多项式构成集合为 $\mathbb{R}[x]$ 的一个理想.

命题1. 设 R_1, R_2 为两个环，$\varphi: R_1 \to R_2$ 为环同态，则 $\ker\varphi$ 为 R_1 的理想.

证明：1) $\forall\, x, y \in \ker\varphi$，$\varphi(x-y) = \varphi(x) - \varphi(y) = 0 - 0 = 0$

所以 $x-y \in \ker\varphi$

2) $\forall\, x \in R_1$，$y \in \ker\varphi$，$\varphi(xy) = \varphi(x)\cdot\varphi(y) = \varphi(x)\cdot 0 = 0$

所以 $xy \in \ker\varphi$

$\varphi(yx) = \varphi(y)\cdot\varphi(x) = 0\cdot\varphi(x) = 0$

所以 $yx \in \ker\varphi$

则有 $\ker\varphi$ 既为 R_1 的左理想，又为 R_1 的右理想. 所以 $\ker\varphi$ 为 R_1 的理想.

定义. 设 R 为一个环，S 为 R 的一个子集，称集合

$$\langle S\rangle_R^l := \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i s_i + \sum n_p s_p \;\middle|\; \begin{matrix} s_i \in S \\ r_i \in R \\ s_p \in S, n_p \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\}$$

为由 S 在 R 中<u>生成</u>的左理想. 同样可定义

$$\langle S\rangle_R^r := \left\{ \sum_{i=1}^{m} s_i r_i + \sum n_p s_p \;\middle|\; \begin{matrix} s_i \in S \\ r_i \in R \\ s_p \in S\ n_p \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\}$$

为由 S 在 R 中<u>生成</u>的右理想.

$$\langle S\rangle_R = \left\{ \sum_{i=1}^{m_1} l_i s_i r_i + \sum_{j=1}^{m_2} \bar{l}_j \bar{s}_j + \sum_{k=1}^{m_3} \tilde{s}_k \tilde{r}_k + \sum_{p=1}^{m_4} n_p \hat{s}_p \;\middle|\; \begin{matrix} \bar{s}_i, \tilde{s}_j, \hat{s}_k \in S \\ l_i, \tilde{r}_i, \bar{l}_j, r_i \in R \\ n_p \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\}$$

为由 S 在 R 中<u>生成</u>的理想.

注：更简洁的定义是：$\langle S\rangle_R$ 为所有包含 S 的 R 的理想的交.

定义：设 S 为 R 的理想，若 S 是由一个元素 a 在 R 中生成，则称 S 为 R 的一个<u>主理想</u>

命题2. $\mathbb{Z}$ 的任何理想皆是主理想

<u>证明</u>. 设 I 为 $\mathbb{Z}$ 的任意理想，若 $I=\{0\}$，则命题成立.

否则令 a 为 I 中绝对值最小的元素，下证 $I=\langle a\rangle$.

$\forall b\in I$，$\quad b=q\cdot a+r \quad \begin{matrix} q\in\mathbb{Z} \\ r\in\mathbb{Z} \text{ 且 } |r|<|a|. \end{matrix}$

因为 $b\in I$，$q\cdot a\in I \Rightarrow r=b-q\cdot a\in I \Rightarrow r=0$

所以 $b=q\cdot a$ 即 $I=\langle a\rangle$.

$\square$

<u>例</u> $\langle 3,6\rangle=\langle 3\rangle$

$\langle 3,7\rangle=\langle 1\rangle=\mathbb{Z}$.

更一般地：$\langle m,n\rangle=\langle g\rangle$

其中 $g=\gcd(m,n)$.

剩余类环：（下面假设 R 为交换环）

设 I 为 R 的理想，定义关系：

$$x\sim_I y \iff x-y\in I.$$

可以验证 $\sim_I$ 为等价关系，则可以考虑商集 $R/\sim_I$，记为 R/I

在等价类中定义：

$$\begin{aligned}\bar a+\bar b&=\overline{a+b}\\ \bar a\cdot\bar b&=\overline{ab}\end{aligned} \qquad (*)$$

良定义：加法显然. 设 $\quad a'=a+u,\ u\in I$

$\qquad b'=b+v,\ v\in I$

则 $\quad (a+u)(b+v)=ab+\underbrace{ub+av+uv}_{w}$

由理想定义，$w\in I$ 　　所以 $(*)$ 定义与代表元选取无关.

<u>claim</u>. R/I 关于 $(*)$ 中运算构成一个环，称为 R 关于 I 的商环（或剩余类环）.

6. 设 $(R,+,0,\cdot,1)$ 是一个环, $u\in R$. 若存在 $v\in R$ 使得 $uv=1$, 我们称 u 有右逆. 现设 u 有右逆, 证明以下命题等价:

(1) u 不是 R 中的可逆元;

(2) u 为左零因子;

(3) u 有多于一个右逆.

证明: $uv=1$ u有右逆 $\boxed{\Rightarrow u\neq 0}$

(1) $\Rightarrow$ (2)

如果 u 不是 R 中可逆元，则 u 不存在左逆

$$uv=1 \Rightarrow uv-1=0 \Rightarrow (uv-1)u=0$$

$$(uv-1)u = uvu-u = \underline{u(vu-1)}$$

注意 $vu-1\neq 0$ 否则 v是u的左逆

所以 $vu-1$ 是右零子 且 u是左零因子.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 u为左零因子, 则 $\exists\, w\neq 0$ s.t. $uw=0$

于是 $uv-uw=u(v-w)=1-0=1$

$\Rightarrow$ $v-w$ 为 u的右逆 且 $v-w\neq v$.

即 u存在多于一个右逆

(3) $\Rightarrow$ (1) 假设 $w_1,w_2\in R$ 且 $w_1\neq w_2$ 都是 u的右逆 即

$$\begin{cases} uw_1=1 \\ uw_2=1 \end{cases} \Rightarrow u(\overset{\neq 0}{w_1-w_2})=0$$

由此可知, u不是R中可逆元, 否则 $u^{-1}u(w_1-w_2)=u^{-1}\cdot 0=0$

$\Rightarrow w_1-w_2=0$ 矛盾!