第十二次习题课.

回忆：设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

1. A 的伴随矩阵 $A^\vee$ 定义为: $(A_{j,i})_{n\times n}$, 其中 $A_{i,j}$ 为 A 的第 i 行第 j 列的代数余子式.
2. $AA^\vee = |A|E_n$. 若A可逆 则 $A^\vee = |A|\cdot A^{-1}$
3. 设 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$, 则线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $|A| \neq 0$, 即 A 可逆. 此时 $x_i = \det(\overrightarrow{A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_{i-1}}, \boldsymbol{b}, \overrightarrow{A_{i+1}}, \cdots, \overrightarrow{A_n})/\det(A)$.
4. 设 $B \neq O$, 则以下命题等价:
   (1) $\mathrm{rank}(B) = r$;
   (2) B 的所有大于 r 阶的子式为零且存在至少一个 r 阶子式非零;
   (3) B 的所有 $r+1$ 阶子式为零且存在至少一个 r 阶子式非零.
   所以 r 就是 A 的最大非零子式的阶数.

作业:

1. 利用伴随矩阵求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

的逆, 其中 $ad - bc \neq 0$.

1. $A^\vee = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \dfrac{A^\vee}{|A|} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

2. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 证明: $(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1}A^\vee$ 和 $|A^\vee| = |A|^{n-1}$.

2. 证: 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ $\quad \lambda A = (\lambda a_{ij})_{n\times n}$

$$\Rightarrow (\lambda A)^\vee = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1}A_{1,1} & \cdots & \lambda^{n-1}A_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda^{n-1}A_{1,n} & \cdots & \lambda^{n-1}A_{n,n} \end{pmatrix} = \lambda^{n-1}\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{n,1} \\ \vdots & & \\ A_{1,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \lambda^{n-1}A^\vee$$

②. 若 $|A| \neq 0$ 则

$A \cdot A^\vee = |A| \cdot E_n \Rightarrow |A \cdot A^\vee| = ||A| \cdot E_n| = |A|^n \Rightarrow |A^\vee| = |A|^{n-1}$

若 $|A| = 0$ 则 A不可逆 $\Leftrightarrow$ $A^\vee$ 不可逆. (由第3题)

$\Rightarrow |A^\vee| = |A| = 0$ 即 $|A^\vee| = |A|^{n-1}$ 成立.

3. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$. 证明：$\operatorname{rank}(A^\vee) = \begin{cases} n, & \text{若 } \operatorname{rank}(A) = n; \\ 1, & \text{若 } \operatorname{rank}(A) = n-1; \\ 0, & \text{若 } \operatorname{rank}(A) < n-1. \end{cases}$

证：① 当 A 满秩时，即 $\operatorname{rank}(A)=n$ 时

A 可逆且 $|A| \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(A^{-1}) = n$.

$\Rightarrow A^\vee = |A| \cdot A^{-1} \Rightarrow \operatorname{rank}(A^\vee) = n$.

② 当 $\operatorname{rank}(A) = n-1$ 时.

(方法一)：由定义可知，A 中至少存在一个 $n-1$ 阶非零子式.

$\Rightarrow A^\vee \neq O \Rightarrow \operatorname{rank}(A^\vee) \geq 1$.

又由 $|A| = 0 \Rightarrow A \cdot A^\vee = O$

由 Sylvester 秩不等式

$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A^\vee) \leq n + \operatorname{rank}(A \cdot A^\vee)$

即 $n-1 + \operatorname{rank}(A^\vee) \leq n \Rightarrow \operatorname{rank}(A^\vee) \leq 1$

综上，$\operatorname{rank}(A^\vee) = 1$

(方法二)：类似可得 $\operatorname{rank}(A^\vee) \geq 1$

且 $A \cdot A^\vee = O$

$\Rightarrow A^\vee$ 的每一列都是齐次线性方程组 $H: A\vec{v} = \vec{0}$ 的解.

由对偶定理. $\dim(\mathrm{sol}(H)) + \operatorname{rank}(A) = n$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{sol}(H)) = 1$ 即 $A^\vee$ 的列空间维数不超过 1

即 $\operatorname{rank}(A^\vee) \leq 1$ 综上 $\operatorname{rank}(A^\vee) = 1$

③ 当 $\operatorname{rank}(A) < n-1$ 时，即所有 A 的 $n-1$ 阶子式为 0

$\Rightarrow A^\vee = O$.

4. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明: $\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.

证: $\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix}$

$= \det(A+B)\det(A-B)$

5. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 满足 $AA^t = E_n$ 和 $|A| = -1$. 证明: $|E_n + A| = 0$.

证: 由 $A \cdot A^t = E_n$

$\Rightarrow |E_n + A| = |A \cdot A^t + A| = |A \cdot (A^t + E_n)|$

$= |A| \cdot |A^t + E_n| = -|A^t + E_n|$

$\Rightarrow |A + E_n| + |A^t + E_n| = 0$

又由 $|A + E_n| = |(A + E_n)^t| = |A^t + E_n|$

$\Rightarrow |A + E_n| = |A^t + E_n| = 0$.

扰动法:

idea: 若一个矩阵不是可逆矩阵, 则通过一个"扰动"使其变为可逆矩阵.

引理: 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 则 $\det(\lambda E_n + A)$ 是一个关于 λ 的首一多项式.
(次数为 n).

证: 由定义

$$\det(\lambda E_n + A) = \begin{vmatrix} \lambda + a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda + a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda + a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda + a_{11}) \cdots (\lambda + a_{nn}) + (*)$$

可知 $(*)$ 中 λ 的次数必小于等于 $n-1$ $\Rightarrow \det(\lambda E_n + A)$ 是一个关于 λ 的首1多项式.

代数基本定理:

任何一个非零的 n 次复系数多项式, 都正好有 n 个复数根.

推论: $\det(\lambda E_n + A)$ 至多有 n 个实根

命题1(摄动法) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 则 $\exists\, \varepsilon > 0$, s.t. $\forall\, |\lambda| > \varepsilon$ 时 有 $\det(\lambda E_n + A) \neq 0$

证: 因为多项式 $f(\lambda) = \det(\lambda E_n + A)$ 的根为有限多个
所以 λ 充分大时 $\det(\lambda E_n + A) \neq 0$

命题2: 如果一个次数小于等于 n 的多项式 $f(\lambda)$ 的实根个数大于 n, 则 f 只能等于 0.

推论: 设 $f(\lambda), g(\lambda)$ 是两个关于 λ 的多项式, 且次数都小于等于 n, 如果 $f(\lambda), g(\lambda)$ 有多于 n 个点取值相同, 则 $f = g$.

证: 取 $h(\lambda) = f(\lambda) - g(\lambda)$ 即 $h(\lambda)$ 有多于 n 个实根 $\Rightarrow h = 0$.

例: 若 $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$. $\det(A) \neq 0$.

证: $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(AD - CB) & 若\ AC = CA \\ \det(DA - CB) & 若\ AB = BA. \end{cases}$

证: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & -A^{-1}B \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

$$= \det(AD - ACA^{-1}B) \quad (1)$$

$$= \det(DA - CA^{-1}BA) \quad (2)$$

① if $AC = CA$ $\overset{由(1)}{\Longrightarrow}$ 左式 $= \det(AD - CB)$

② if $AB = BA$ $\overset{由(2)}{\Longrightarrow}$ 左式 $= \det(DA - CB)$

例2：若上例中去掉条件 $\det(A)\neq 0$，证明结论成立。

证：考虑矩阵 $A_\lambda=\lambda E_n+A$

令 $X_\lambda=\begin{pmatrix} A_\lambda & B \\ C & D \end{pmatrix}$

对 $\forall \lambda\in\mathbb{R}$

若 $AC=CA \Rightarrow A_\lambda\cdot C= C\cdot A_\lambda$

若 $AB=BA \Rightarrow A_\lambda B= B\cdot A_\lambda$.

当 $|\lambda|$ 充分大时 由摄动法可知 $\det(A_\lambda)\neq 0$.

由例1可知 $\det(X_\lambda)=\det(A_\lambda D-CB)\quad (AC=CA)\quad (1)$

$\det(X_\lambda)=\det(DA_\lambda-CB)\quad (AB=BA).\quad (2)$

下只考虑(1)的情形：

设 $f(\lambda)=\det(X_\lambda)\quad g(\lambda)=\det(A_\lambda D-CB)$

则由于 $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ 都是关于 λ 的次数不超过 n 的多项式

当 $|\lambda|$ 充分大时，$f(\lambda)=g(\lambda)$ 成立 $\Rightarrow f(\lambda)=g(\lambda)$ 对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ 成立

(由推论1可知).

取 $\lambda=0$ 即为所证.

6. (选做) 设 $A, B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明: $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$.

证：① 若 A, B 均可逆 $\Rightarrow |AB|=|A|\cdot|B|\neq 0 \Rightarrow AB$ 可逆.

则 $(AB)^\vee=|AB|\cdot(AB)^{-1}$

$=|A|\cdot|B|\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$

$=(|B|\cdot B^{-1})(|A|\cdot A^{-1})$

$=B^\vee\cdot A^\vee$.

② 一般地，设 $A'(\lambda)=\lambda E_n+A$，$B'(\lambda)=\lambda E_n+B\quad \lambda\in\mathbb{R}$.

类似上例，用摄动法即可.

补充: 1. 若 $ad-bc\neq 0$, 用 $Cramer$ 法则求 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆;

设 $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$ 使得 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

用 $Cramer$ 法则解出

$$x_1=\frac{d}{ad-bc},\ x_2=-\frac{c}{ad-bc},\ y_1=\frac{b}{ad-bc},\ y_2=\frac{a}{ad-bc}.$$

回忆: 设 $A\in\mathbb{R}^{(n-1)\times n}$ 满秩, 则齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个非零解为: $(|A_1|,(-1)|A_2|,\cdots,(-1)^{n-1}|A_n|)^t$, 其中 $|A_i|$ 为 A 去掉第 i 列后的矩阵.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个互不相同的实数, 令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \cdots & \alpha_n^{n-2} \end{pmatrix}$. 求以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间.

注意到该题目与上述回忆的条件基本一致, 我们只需要证明 $\operatorname{rank}(A)=n-1$ 即可. 但很容易找到 A 的一个 $n-1$ 阶子式非零. 所以所求方程组的一个非零解为:

$$(\,|A_1|,(-1)|A_2|,\cdots,(-1)^{n-1}|A_n|\,)^t=(-1)^{n-1}\prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_j-\alpha_i)\Big(\frac{1}{\prod\limits_{k\neq 1}(\alpha_1-\alpha_k)},\frac{1}{\prod\limits_{k\neq 2}(\alpha_2-\alpha_k)},\cdots,\frac{1}{\prod\limits_{k\neq n}(\alpha_n-\alpha_k)}\Big)^t$$

所以该方程组的解空间的一个基底为 $\Big(\frac{1}{\prod\limits_{k\neq 1}(\alpha_1-\alpha_k)},\frac{1}{\prod\limits_{k\neq 2}(\alpha_2-\alpha_k)},\cdots,\frac{1}{\prod\limits_{k\neq n}(\alpha_n-\alpha_k)}\Big)^t$.