第十一次习题课.

回忆: 设 $A=(a_{i,j})_{n\times n}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. 定义 A 的行列式为: $\det(A) := \sum\limits_{\sigma\in S_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n} = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \epsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$.
2. $\det(A)=\det(A^t)$.
3. 设 $\overrightarrow{A^{(i)}}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, 则 $\det(\overrightarrow{A^{(1)}},\cdots,\overrightarrow{A^{(i)}},\cdots,\overrightarrow{A^{(n)}})=\det(\overrightarrow{A^{(1)}},\cdots,\boldsymbol{u},\cdots,\overrightarrow{A^{(n)}})+\det(\overrightarrow{A^{(1)}},\cdots,\boldsymbol{v},\cdots,\overrightarrow{A^{(n)}})$
4. 基本的运算性质.
5. 按行(列)展开: 设 $A_{i,j}$ 为 A 关于 $a_{i,j}$ 的代数余子式, 则 $\det(A)=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$.
6. A 可逆当且仅当 $\det(A)\neq 0$. $\Leftrightarrow$ A 满秩.

- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
- $\det(\overrightarrow{A^{(1)}},\cdots,\overrightarrow{A^{(i)}},\cdots\overrightarrow{A^{(n)}}) = \alpha\det(\overrightarrow{A^{(1)}},\cdots,\overrightarrow{v},\cdots,\overrightarrow{A^{(n)}})$

  其中 $\overrightarrow{A^{(i)}}=\alpha\overrightarrow{v}$.

常见行列式:

1. 上(下)三角型: 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$, 则 $\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

2. Vandermonde 行列式: 设 $x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$. 则 $\det(A)=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$.

3. 三线型: 设 $a,b,c\in\mathbb{R}$, $A_n=\begin{pmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 则: $A_n=aA_{n-1}-bcA_{n-2}$.

4. 三爪型: 设 $a_i\neq 0\in\mathbb{R}$, $i=1,\cdots n$, $b_i,c_i\in\mathbb{R}$, $i=2,\cdots n$. $A=\begin{pmatrix}a & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{pmatrix}$, 则:

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix}d & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{pmatrix}$$

其中. $d=a-\frac{b_2c_2}{a_2}-\cdots\frac{b_nc_n}{a_n}$.

- 基本性质：

① 将A中任意两列交换得到B $\Rightarrow \det(B) = -\det(A)$

② A中有两列相同（或线性相关） $\Rightarrow \det(A) = 0$

③ A中某列是其它列的线性组合 $\Rightarrow \det(A) = 0$

④ 把A中某列倍加到另一列上得到B $\Rightarrow \det(B) = \det(A)$.

⑤ A中有一列（行）全为0 $\Rightarrow \det(A) = 0$.

⑥ B是A通过行(列)初等变换得到 $\Rightarrow \det(B) = \det(A)$

- 按行(列)展开：

定义 3.1 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 去掉 A 中第 i 行和第 j 列得到的 $(n-1)$ 阶方阵的行列式称为 A 关于 i 行和 j 列的 $(n-1)$ 阶余子式 (*co-minor*), 记为 $M_{i,j}$. 而 $A_{i,j} := (-1)^{i+j} M_{i,j}$ 称为 A 关于 i 行和 j 列的代数余子式.

定理 3.3 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则对于任意的 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} A_{i,k}}_{\text{按一行展开}} \quad \text{和} \quad \det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{k,j} A_{k,j}}_{\text{按一列展开}}.$$

- 分块矩阵：

定理 3.7 设 $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B).$$

推论 3.9 设 $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则

$$\det \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det(A) \det(B).$$

- 乘法定理： $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ $\quad A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \det(AB) = \det(BA)$

Sylvester 行列式恒等式： $\det(E_m + AB) = \det(E_n + BA)$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

1. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 2(a_1+b_1+c_1) & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ 2(a_2+b_2+c_2) & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ 2(a_3+b_3+c_3) & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{pmatrix} \\ &= 2\det\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2+c_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3+c_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{pmatrix} \\ &= 2\det\begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & -a_1 & -b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -a_2 & -b_2 \\ a_3+b_3+c_3 & -a_3 & -b_3 \end{pmatrix} \\ &= 2\det\begin{pmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ &= 2\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. 计算行列式

$$(1)\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \end{vmatrix}, \quad (2)\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 5 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & -7 \\ 8 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

解: (1)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & e_1 & e_2 \end{vmatrix} = 0$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 5 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & -7 \\ 8 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{2r_2+r_4,2r_1+r_2,-\frac{3}{2}r_1+r_3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 5 \\ 0 & -5 & 12 & 13 \\ 0 & \frac{17}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{29}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 12 & 13 \\ 17 & -9 & -29 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{12r_3+r_1,-9r_3+r_2} \begin{vmatrix} -5 & 0 & 25 \\ 17 & 0 & -38 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第二列展开}} (-1)^{2+3}(-1)\begin{vmatrix} -5 & 25 \\ 17 & -38 \end{vmatrix} = 5\times 38 - 17\times 25 = -235.$$

3. 分别求出在行列式

$$\begin{vmatrix} 5x & x & 1 & x \\ 1 & x & 1 & -x \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

的展开式中含 x^4 和 x^3 的项的系数.

① 若出现 x^4 $\Rightarrow$ 只有对角线上元素 $5x^4$

② 若出现 x^3 $\Rightarrow$ 按第一行展开

$$5x \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & -x \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 1 & -x \\ 3 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & -x \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$- x \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\varepsilon(321) = \varepsilon((13)(2)) = -1$

$\varepsilon(123) = \varepsilon((1)(2)(3)) = +1$

$\varepsilon(231) = \varepsilon((123)) = +1$

$$\Rightarrow 5 \times (-1) \times (-1)^{\varepsilon(321)} - 1 \times (-1)^{\varepsilon(123)} - (-3) \times (-1)^{\varepsilon(321)} - 3 \times (-1)^{\varepsilon(231)}$$

$$= 5 - 1 - 3 - 3$$

4. 计算下列 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

设 原式 $= D_n$ 则 $D_1 = -a_1 + 1$ $D_2 = a_1 a_2 - a_1 + 1$

猜测 $D_n = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n + (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + \cdots + (-1) a_1 + 1$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_1 a_2 \cdots a_i + 1$$

下用数学归纳法证明：

① $n=1,2$ 时 显然成立.

② 设 $n \le k$ 时 均成立.

当 $n=k+1$ 时

$$D_{k+1} = (-1)^{2k+2}(1-a_{k+1})D_k + (-1)^{2k+1}\cdot(-1)^{2k}\cdot(-1)a_{k+1}D_{k-1}$$

$$= (1-a_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i a_1\cdots a_i + 1\right) + a_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i a_1\cdots a_i + 1\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(-1)^i a_1\cdots a_i + 1 - \cancel{a_{k+1}} - a_{k+1}\underbrace{\sum_{i=1}^{k}(-1)^i a_1\cdots a_i + a_{k+1}\cdot\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i a_1\cdots a_i}_{-a_{k+1}\left((-1)^k a_1\cdots a_k\right)} + \cancel{a_{k+1}}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i a_1\cdots a_i$$

由数学归纳法, 可知 $D_n = 1+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_1\cdots a_i$.

5. 设 $A,\ B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明: 存在 $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$A = ABC$$

当且仅当 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AB)$.

证明. 设 $A = ABC$. 则 $\operatorname{rank}(A) \le \operatorname{rank}(AB)$ (矩阵乘积的秩不等式). 同样的理由蕴含 $\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank}(A)$. 故 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AB)$.

设 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AB)$.

方法 1. 因为 $AB = (\vec{AB}^{(1)}, \ldots, \vec{AB}^{(n)})$, 所以 $V_c(AB) \subset V_c(A)$. 因为 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AB)$, 所以 $\dim(V_c(AB)) = \dim(V_c(A))$. 故 $V_c(AB) = V_c(A)$.

设 $AB = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. 则 $V_c(AB) = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. 因为 $V_c(AB) = V_c(A)$, 所以

$$V_c(A) = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle.$$

故对任意 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 存在 $c_{1,j}, \ldots, c_{n,j} \in \mathbb{R}$ 使得

$$\vec{A}^{(j)} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ \vdots \\ c_{n,j} \end{pmatrix} = AB\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ \vdots \\ c_{n,j} \end{pmatrix}.$$

令 $C = (c_{i,j})_{n\times n}$. 则上式蕴含 $A = ABC$.

方法 2. 设 $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 和 $\phi_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是矩阵 A 和 B 对应的线性映射. 则 $\operatorname{im}(\phi_{AB}) \subset \operatorname{im}(\phi_A)$. 因为 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A)$, 所以 $\dim(\operatorname{im}(\phi_{AB})) = \dim(\operatorname{im}(\phi_A))$. 故 $\operatorname{im}(\phi_{AB}) = \operatorname{im}(\phi_A)$. 于是, 存在 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\phi_A(\mathbf{e}_j) = \phi_{AB}(\mathbf{v}_j)$, 其中 $\mathbf{e}_j$ 是 $\mathbb{R}^n$ 标准基中的第 j 个向量, $j = 1, 2, \ldots, n$.

由线性映射基本定理, 存在线性映射 $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 使得

$$\psi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{v}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

则 $\phi_{AB} \circ \psi(\mathbf{e}_j) = \phi_{AB}(\mathbf{v}_j) = \phi_A(\mathbf{e}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 再根据线性映射基本定理, $\phi_{AB} \circ \psi = \phi_A$. 设 C 是 ψ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 $\psi = \phi_C$. 因为 $\phi_A = \phi_{AB} \circ \psi$, 所以 $\phi_A = \phi_{AB} \circ \phi_C = \phi_{ABC}$. 从而 $ABC = A$.

方法 3. 设 $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是系数为未知数的矩阵. 我们求解关于 X 的方程

$$ABX = A. \tag{1}$$

先设 $A = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 把 B 分块为 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, 其中 $B_1 \in \mathrm{M}_r(\mathbb{R})$. 则方程变为

$$\underbrace{\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix}}_{AB} X = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank}(AB) = r$, 所以 AB 中有 r 列线性无关. 故存在可逆矩阵 Q 使得 ABQ 的前 r 列线性无关. 即

$$\underbrace{\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix}}_{AB} QQ^{-1}X = \underbrace{\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ O & O \end{pmatrix}}_{ABQ} Q^{-1}X = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $M_1 \in \mathrm{M}_r(\mathbb{R})$ 满秩. 令 $X = Q\begin{pmatrix} M_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 则

$$ABX = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}X = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = A.$$

故当 $A = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 时方程 (1) 有解.

当 A 是一般 n 阶方阵时, 打洞引理蕴含存在可逆矩阵 S, T 使得 $A = S\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}T$. 则 (1) 等价于

$$S\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}T = S\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}TBX \iff \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}TBX T^{-1}.$$

因为 $\operatorname{rank}(AB) = r$ 蕴含 $\operatorname{rank}(\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}(TB)) = r$, 所以最后一个矩阵方程有解, 即 (1) 有解. 令其一个解为 C 即可.