习题课讲义-矩阵求逆与子空间对应的方程组

矩阵求逆：

<u>例子 1.</u> $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \xrightarrow[F_{3,1}(-1)]{F_{2,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{3,2}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3(-\frac{1}{3})]{F_2(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_{1,3}(+1)]{F_{2,3}(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_{1,2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$的线性闭集与齐次线性方程组的对应

设 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 为维数为 r 的线性闭集.

下面我们来构造一个齐次线性方程组使其解空间为 V. 假设要构造的线性方程组的矩阵表示为 $A\vec{x}=0$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

设 $v_1, v_2, \cdots, v_r$ 为 V 中 r 个线性无关的向量, 即为 V 的一组基. 则有

$$A(v_1, v_2, \cdots, v_r) = O_{n\times r}$$

令 $B = (v_1, v_2, \cdots, v_r)_{n\times r}$, 则有 $AB = O_{n\times r}$

$\Rightarrow \ {}^tB\,{}^tA = O_{r\times n}$ $\quad {}^tB \in \mathbb{R}^{r\times n}$

$\Rightarrow \ {}^tA$ 的每一列为方程组 ${}^tB\vec{y}=0$ 的解

因为 $\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}({}^tB)=r$

所以 $\dim(V_{{}^tB}) = n-r$

我们可以找到 $V_{{}^tB}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解

记为 $u_1, \cdots, u_{n-r} \in \mathbb{R}^n$, 并令 $U = (u_1, u_2, \cdots u_{n-r}, 0)_{n\times n}$

② 则可取 $A = {}^tU$.

例子 2. 设 $V \subseteq \mathbb{R}^3$ 为线性闭集，维数为 2

其一组基为 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

下面我们来构造一个齐次线性方程组使其解空间为 V.

考虑 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

求解线性方程组：${}^tB\vec{y} = 0$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -\frac{3}{2} y_3 \end{cases}$$

其解空间为 1 维的，基可取为 $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

所以 $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A = {}^tU = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

对应方程为：$-3x_2 + 2x_3 = 0$

例子3.

设 $V \subseteq \mathbb{R}^3$ 为线性闭集，维数为1.

其一组基为 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

下面我们来构造一个齐次线性方程组使其解空间为 V.

考虑 $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ${}^tB = (1,2,3)$, ${}^tB\vec{y} = 0$

对偶方程为：$y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0$

$$\Rightarrow y_1 = -2y_2 - 3y_3$$

其解空间为2维的，基可取为

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以 $U = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A = {}^tU = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

对偶方程为：

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$