第九次习题课.

1. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},$$

计算：A^2, A^3, 并求对任意$k\in\mathbb{Z}^+$, A^k 的表达式.

1. 由 $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

$$\Rightarrow A^k=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2^k-1&2^k\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}1&0\\7&8\end{pmatrix}$$

2. 设 $A,B,C\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 证明：

$$\operatorname{rank}(A+B+C)\le\operatorname{rank}(A+B)+\operatorname{rank}(B+C)+\operatorname{rank}(C+A).$$

证: 利用 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(2A)$

$\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

秩不等式: $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$ $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

① $\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

② $\operatorname{rank}(AB)\le\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$

③ $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-s\le\operatorname{rank}(AB)$ (Sylvester 不等式)

$A\in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in \mathbb{R}^{n\times m}$

④ $\operatorname{rank}(E_m+AB)+n=\operatorname{rank}(E_n+BA)+m$

M: $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}$

⑤ $\operatorname{rank}(M)\geq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$ 当且仅当 $C=O$ 时等号成立.

3. 设 $A, B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是对称矩阵, $C\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是斜对称矩阵, 证明以下结论:

(1) AB 是对称矩阵当且仅当 $AB=BA$,

(2) 如果 A 是可逆矩阵, 则 A^{-1} 也是对称矩阵,

(3) 如果 C 是可逆矩阵, 则 C^{-1} 也是斜对称矩阵.

对称矩阵: $A^t=A$.　　斜对称矩阵: $A^t=-A$.

(1) "$\Rightarrow$" AB, A, B 对称

$\Rightarrow A^t=A \quad B^t=B \qquad (AB)^t=B^tA^t=B\cdot A=AB$.

"$\Leftarrow$" $AB=BA$.

$(AB)^t=B^tA^t=BA=AB \Rightarrow AB$ 对称.

(2) A 可逆, 则 $E=(A\cdot A^{-1})^t=(A^{-1})^t\cdot A^t$

由 A 对称, 则 $E=(A^{-1})^t\cdot A \Rightarrow (A^{-1})^t=A^{-1}$ 即 A^{-1} 对称

(3) C 斜对称 $\Rightarrow (C)^t=-C$

$\Rightarrow E=(C\cdot C^{-1})^t=(C^{-1})^t\cdot C^t=-(C^{-1})^t\cdot C$

$\Rightarrow C^{-1}=-(C^{-1})^t$ 即 C^{-1} 斜对称.

4. 设 A, $\cancel{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 证明：$\operatorname{tr}(AA^t) \geq 0$, 且 $\operatorname{tr}(AA^t) = 0$ 当且仅当 $A = 0$.

证: 设 $B = A \cdot A^t$ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ $B = (b_{ij})_{n\times n}$

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geq 0.$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \geq 0.$$

$$\operatorname{tr}(AA^t) = 0 \iff \forall\, 1 \leq i \leq n,\ b_{ii} = 0$$

$$\iff \forall\, 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq n \quad a_{ik} = 0 \iff A = 0.$$

5. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 证明：如果 $AB = O_{m\times n}$, 则 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq s$.

利用 Sylvester 不等式即可.

期中答案解析

2. (10分) 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 如果 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U$, 则称 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 等价, 并记为 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$.

(i) 验证 $\sim_U$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的等价关系.

(ii) 证明: $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$ 当且仅当 $\mathbf{x} + U = \mathbf{y} + U$.

(2). *(ii)* 设 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U$. 设 $\mathbf{v} \in \mathbf{x} + U$. 则存在 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$. 故 "$\Rightarrow$"

$$\mathbf{v} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{u}.$$

因为 $\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{u} \in U$, 所以 $\mathbf{v} \in \mathbf{y} + U$, 所以 $\mathbf{x} + U \subset \mathbf{y} + U$. 同理可知, $\mathbf{y} + U \subset \mathbf{x} + U$. 故 $\mathbf{x} + U = \mathbf{y} + U$.

"$\Leftarrow$" 设 $\mathbf{x} + U = \mathbf{y} + U$. 因为 $\mathbf{x} \in \mathbf{x} + U$, 所以存在 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{u}$. 故 $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{u} \in U$. 由此得出, $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$. *(5分)*

另证: 设 $\mathbf{v} \sim_U \mathbf{x}$. 则 $\mathbf{v} - \mathbf{x} \in U$. 故 $\mathbf{v} \in \mathbf{x} + U$. 反之, 设 $\mathbf{w} \in \mathbf{x} + U$. 则 $\mathbf{w} - \mathbf{x} \in U$. 故 $\mathbf{w} \sim_U \mathbf{x}$. 综上所述, $\mathbf{x} + U$ 是 $\mathbf{x}$ 关于 $\sim_U$ 的等价类. 由此可知, $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$ 当且仅当 $\mathbf{x} + U = \mathbf{y} + U$. *(5分)*

6. (10分) 设 m, n 是正整数.

(i) 证明: 存在整数 u, v 满足 $0 \leq u < n$ 和 $um + vn = \gcd(m, n)$.

(ii) 满足 (i) 中结论的整数 u 和 v 是否唯一? 如果唯一, 请证明; 否则, 举出反例.

(1) 由 Bezout 关系可知：$\exists\, a, b \in \mathbb{Z}$ s.t.

$$am + bn = \gcd(m, n)$$

由 ~~整数~~带余除法得 $a = qn + r$ 其中 $q \in \mathbb{Z}$ $r \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$

$$\Rightarrow \gcd(m, n) = (qn + r)m + bn$$

$$= rm + (qm + b)n$$

令 $u = r$, $v = qm + b$ 即可

(2) 不成立．例：$8 - 6 = 4 \times 8 - 5 \times 6 = 2$.

7. (10分) 设 ϕ 和 ψ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射. 证明:

(i) 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们有 $\operatorname{im}(\alpha\phi + \beta\psi) \subset \operatorname{im}(\phi) + \operatorname{im}(\psi)$ 成立;

(ii) 如果 $\operatorname{im}(\phi) + \operatorname{im}(\psi) = \ker(\phi) + \ker(\psi) = \mathbb{R}^n$, 则

$$\operatorname{im}(\phi) \cap \operatorname{im}(\psi) = \ker(\phi) \cap \ker(\psi) = \{\mathbf{0}\}.$$

证：(i) 设 $\forall\, \vec{y} \in \operatorname{im}(\alpha\phi + \beta\psi)$

即 $\exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. $(\alpha\phi + \beta\psi)(\vec{x}) = \vec{y}$

$$\Rightarrow \alpha\phi(\vec{x}) + \beta\psi(\vec{x}) = \vec{y}$$

由 $\phi(\vec{x}), \psi(\vec{x}) \in \operatorname{im}(\phi) + \operatorname{im}(\psi)$

$$\Rightarrow \vec{y} = \alpha\phi(\vec{x}) + \beta\psi(\vec{x}) \in \operatorname{im}(\phi) + \operatorname{im}(\psi)$$

即 $\operatorname{im}(\alpha\phi + \beta\psi) \subset \operatorname{im}(\phi) + \operatorname{im}(\psi)$.

(ii) 由条件知 $\dim(\operatorname{im}(\phi) + \operatorname{im}(\psi)) = n$

由维数公式

$$n = \dim(\operatorname{im}(\phi) + \operatorname{im}(\psi)) = \dim(\operatorname{im}(\phi)) + \dim(\operatorname{im}(\psi)) - \dim(\operatorname{im}(\phi) \cap \operatorname{im}(\psi)) \quad ①$$

类似得 $n = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\ker(\psi)) - \dim(\ker(\phi) \cap \operatorname{im}(\psi)) \quad ②$

①+② 再结合对偶定理得

$$2n = \underbrace{\big(\dim(\mathrm{im}(\phi)) + \dim(\ker(\phi))\big)}_{=n} + \underbrace{\big(\dim(\mathrm{im}(\psi)) + \dim(\ker(\psi))\big)}_{=n}$$
$$- \dim(\mathrm{im}(\phi)\cap \mathrm{im}(\psi)) - \dim(\ker(\phi)\cap \mathrm{im}(\psi))$$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{im}(\phi)\cap \mathrm{im}(\psi)) = \dim(\ker(\phi)\cap\ker(\psi)) = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{im}(\phi)\cap\mathrm{im}(\psi) = \ker(\phi)\cap\ker(\psi) = \{\vec{0}\}$$

8. (10分) 设 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^s$ 和 $\psi:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^m$ 是线性映射. 证明:

(i) 如果 $\psi\circ\phi$ 是满射, 则 $\dim(\mathrm{im}(\phi))\geq m$;

(ii) 如果 $\psi\circ\phi$ 是单射, 则 $\dim(\ker(\psi))\leq s-n$.

$\psi\circ\phi$ 满射 $\Rightarrow$ ψ 满射

$\psi\circ\phi$ 单射 $\Rightarrow$ ϕ 单射.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi\circ\phi"'] & \mathbb{R}^s \arrow[d, "\psi"] \\ & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

(i). $\psi\circ\phi$ 满射

$$\Rightarrow \mathrm{im}(\psi\circ\phi) = \psi(\mathrm{im}(\phi)) = \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow \dim(\psi\circ\phi) = \dim(\psi(\mathrm{im}(\phi))) = m$$

由子空间在线性映射下的像的维数不比原子空间维数高.

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{im}(\phi)) \geq m.$$

(ii) 对偶定理: $\dim(\mathrm{im}(\psi\circ\phi)) + \dim(\ker(\psi\circ\phi)) = n$.

由 $\psi\circ\phi$ 单射 $\Rightarrow$ $\ker(\psi\circ\phi) = \{\vec{0}\}$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{im}(\psi\circ\phi)) = n$$

又由 $\mathrm{im}(\phi)\subset\mathbb{R}^s$ $\Rightarrow$ $\mathrm{im}(\psi\circ\phi)\subset\mathrm{im}(\psi)$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{im}(\psi)) \geq n$$

再由对偶定理 $s = \dim(\ker(\psi)) + \dim(\mathrm{im}(\psi)) \geq \dim(\ker(\psi)) + n$

$$\Rightarrow \dim(\ker(\psi)) \leq s-n.$$

用矩阵来看：设 ϕ 对应矩阵 $A\in\mathbb{R}^{s\times n}$ ψ 对应矩阵 $B\in\mathbb{R}^{m\times s}$

$\Rightarrow$ $\psi\circ\phi$ 对应矩阵 $BA\in\mathbb{R}^{m\times n}$

(ii) $\psi\circ\phi$ 单射 $\Rightarrow$ ϕ 单射

$\Rightarrow$ A，BA 列满秩 $\mathrm{rank}(A)=n$ $\mathrm{rank}(BA)=n$.

$\Rightarrow$ 由 $\mathrm{rank}(A)\leq\min\{n,s\}$ $\Rightarrow$ $n\leq s$

要证 $\dim(\ker(\psi))\leq s-n$ 由对偶定理 $\dim(\ker(\psi))+\dim(\mathrm{im}(\psi))=s$

只需证 $\dim(\mathrm{im}(\psi))\geq n$. 即 $\mathrm{rank}(B)\geq n$.

$\mathrm{rank}(BA)\leq\min\{\mathrm{rank}(B),\mathrm{rank}(A)\}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{rank}(B)\geq\mathrm{rank}(A)=n$. 得证.