中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB003Y-B02

课程名称：线性代数II-B (期中试卷答案)

任课教师：李子明、边华俊、刘群欢

注意事项：

1. 考试时间为120 分钟，考试方式闭卷；
2. 全部答案写在答题纸上；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (15分) 设 F 是域, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 是 F 上线性空间 V 的一组基. 令:

$$\epsilon_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \epsilon_2 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \quad \epsilon_3 = \mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3.$$

(i) 设 F 的特征为零. 证明: $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 是 V 的一组基. 并计算 P 使得

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)P.$$

再设 $\vec{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = y_1\epsilon_1 + y_2\epsilon_2 + y_3\epsilon_3$ 是 V 中任意向量, 其中 $x_i, y_i \in F$, $i = 1, 2, 3$. 计算矩阵 Q 使得 $(y_1, y_2, y_3)^t = Q\,(x_1, x_2, x_3)^t$.

(ii) 当 F 的特征为何值时, ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 不是 V 的一组基. 并证明你的结论.

解. *(i)* 直接计算得

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(P) = 15 \neq 0$, 所以 P 可逆. 故 ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 是 V 的一组基.

坐标变换得矩阵为 P^{-1}. 故

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

(iii) 因为 $\det(P) = 15$, 所以当 F 的特征等于 *3* 或 *5* 时, ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 不是 V 的一组基.

2. (15分) 设 $q(x_1,x_2,x_3)=x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的实二次型.

(i) 计算对称矩阵 A 使得 $q(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)A\,(x_1,x_2,x_3)^t$.

(ii) 求可逆矩阵 P 使得 P^tAP 是对角矩阵.

(iii) 计算 $q(x_1,x_2,x_3)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

解. *(i)* 直接计算得

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\2&0&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

(ii) 利用行列相伴法可得

$$P=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(iii) 因为 $P^tAP=\mathrm{diag}(4,-1,0)$, 所以 q 的正负惯性指数都等于 *1*.

3. (15分) 设 A 是 n 阶实对称方阵, 其中 $n>1$. 判断 A 的类型 (半正定但非正定、正定、半负定但非负定、负定、不定), 并说明理由:

(i) $A=-P^tP$, 其中 P 是可逆实方阵.

(ii) $A=B^tB$, 其中 $B\in\mathbb{R}^{1\times n}$.

(iii) A 的所有顺序主子式都小于零.

解. *(i)* 因为 P 可逆, 所以 P^tP 正定. 故 A 负定.

(ii) 因为 $\mathrm{rank}(A)\le 1<n$, 所以 A 半正定但非正定.

(iii) 因为 A 的二阶顺序主子式小于零, 所以 A 不定.

4. (15分) 设实空间 $\mathbb{R}[x]^{(3)}=\{f\in\mathbb{R}[x]\mid\deg(f)<3\}$, 其上的两个线性算子:

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{D}: & \mathbb{R}[x]^{(3)} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]^{(3)}\\ & p(x) & \mapsto & \dfrac{dp}{dx}\end{array} \quad 和 \quad \begin{array}{rccc}\Delta: & \mathbb{R}[x]^{(3)} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]^{(3)}\\ & p(x) & \mapsto & p(x+1)-p(x).\end{array}$$

计算

(i) $\mathcal{D}$ 和 Δ 在基底 $1,x,x^2$ 下的矩阵;

(ii) Δ 在基底 $1, x, x(x-1)$ 下的矩阵;

(iii) $\mathcal{D}$ 和 Δ 的极小多项式.

解. *(i)* 直接计算得

$$\mathcal{D}(1, x, x^2) = (0, 1, 2x) = (1, x, x^2)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}.$$

$$\Delta(1, x, x^2) = (0, 1, 2x+1) = (1, x, x^2)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}.$$

故 $\mathcal{D}$ 和 Δ 在 $1, x, x^2$ 下的矩阵分别是 A 和 B.

(ii) 直接计算得

$$\Delta(1, x, x(x-1)) = (0, 1, 2x) = (1, x, x(x-1))A.$$

故 Δ 在 $1, x, x(x+1)$ 下的矩阵是 A.

(iii) 因为 $\mathcal{D}^3 = \mathcal{O}$, 所以 $\mu_{\mathcal{D}} \mid t^3$. 因为 $\mathcal{D}^2 \neq 0$, 所以 $\mu_{\mathcal{D}} = t^3$.

根据 *(i)* 和 *(ii)*, $\mu_{\mathcal{D}} = \mu_A = \mu_\Delta$. 故 $\mu_\Delta = t^3$.

5. (10分) 设域 F 的特征为零, $n > 1$, F^n 的两个子空间 V_1 和 V_2 分别是线性方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 和线性方程组 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间.

(i) 证明: $F^n = V_1 \oplus V_2$.

(ii) 计算 $\mathbf{v}_1 \in V_1$ 和 $\mathbf{v}_2 \in V_2$ 使得 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, 其中 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t \in F^n$.

(i) 证明. 因为 $\dim(V_1) = n - 1$ 和 $V_2 = \langle (1, 1, \ldots, 1)^t \rangle$, 所以根据直和得维数公式, 欲证 $F^n = V_1 \oplus V_2$, 只需证 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$. 设 $(\alpha, \ldots, \alpha)^t \in V_1$. 则 $n\alpha = 0$. 因为 $n \neq 0$, 所以 $\alpha = 0$. 故 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$.

(ii) 设 $\mathbf{v}_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t$ 和 $\mathbf{v}_2 = (\beta, \ldots, \beta)^t$. 则

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \iff \mathbf{e}_1 = (\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta, \ldots, \alpha_n + \beta)^t \iff \alpha_1 + \beta = 1, \alpha_2 = -\beta, \ldots, \alpha_n = -\beta. \quad \textit{(3分)}$$

因为

$$\mathbf{v}_1 \in V_1 \implies \alpha_1 = -\alpha_2 - \cdots - \alpha_n \implies \alpha_1 = (n-1)\beta,$$

故 $n\beta=1$. 于是

$$\mathbf{v}_1=((n-1)/n,-1/n,\dots,-1/n)^t,\ \mathbf{v}_2=(1/n,1/n,\dots,1/n)^t.$$

6. (10分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子, $\mathbf{x}\in V$. 证明:

(i) 如果 $\mathcal{A}(\mathbf{x}),\mathcal{A}^2(\mathbf{x}),\dots,\mathcal{A}^n(\mathbf{x})$ 线性无关, 则 $\mathbf{x},\mathcal{A}(\mathbf{x}),\dots,\mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{x})$ 线性无关且 $\mathcal{A}$ 可逆;

(ii) 如果 $\mathbf{x},\mathcal{A}(\mathbf{x}),\dots,\mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{x})$ 线性无关, 能否推出 $\mathcal{A}(\mathbf{x}),\mathcal{A}^2(\mathbf{x}),\dots,\mathcal{A}^n(\mathbf{x})$ 线性无关? 请说明理由.

证明. *(i)* 设 $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}\in F$ 使得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\mathcal{A}^i(\mathbf{x})=\mathbf{0}.$$

将上式两侧作用 $\mathcal{A}$ 得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\mathcal{A}^{i+1}(\mathbf{x})=\mathbf{0}.$$

故 $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_{n-1}=0$. 于是, $\mathbf{x},\mathcal{A}(\mathbf{x}),\dots,\mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{x})$ 线性无关.

设 $\mathbf{v}\in\ker(\mathcal{A})$. 注意到 $\mathbf{x},\mathcal{A}(\mathbf{x}),\dots,\mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{x})$ 的一组基. 故存在

$$\beta_0,\dots,\beta_{n-1}\in F$$

使得

$$\mathbf{v}=\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\mathcal{A}^i(\mathbf{x}).$$

因为 $\mathcal{A}(\mathbf{v})=\mathbf{0}$, 所以 $\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\mathcal{A}^{i+1}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$. 故 $\beta_0=\cdots=\beta_{n-1}=0$, 即 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 由此得出 $\mathcal{A}$ 是单射. 从而, $\mathcal{A}$ 可逆.

(ii) 不成立. 例如: 设 $\mathcal{D}$ 是第四题中的微分算子. 则 $x^2,\mathcal{D}(x^2),\mathcal{D}^2(x^2)$ 线性无关. 但 $\mathcal{D}^3(x^2)=0$ 蕴含 $\mathcal{D}(x^2),\mathcal{D}^2(x^2),\mathcal{D}^3(x^2)$ 线性相关.

7. (10分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, U 是 V 的 d 维子空间, 其中 $d>0$. 设 f 是 V 上双线性型, $W=\{\mathbf{w}\in V\mid\forall\ \mathbf{u}\in U, f(\mathbf{u},\mathbf{w})=0\}$. 证明:

(i) W 是 V 的子空间;

(ii) $\dim(W)\geq n-d$.

证明: *(i)* 设 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. 再设 $\mathbf{u} \in U$. 则

$$f(\mathbf{u}, \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2) = \alpha_1 f(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{u}, \mathbf{w}_2) = 0.$$

故 $\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 \in W$. 于是, W 是子空间.

(ii) 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 是 U 的一组基. 对 $i = 1, \ldots, d$, 令

$$\begin{array}{rccc} \ell_i: & V & \longrightarrow & F \\ & \mathbf{x} & \mapsto & f(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}). \end{array}$$

则

$$W = \{\mathbf{w} \in V \mid \ell_1(\mathbf{v}) = \cdots = \ell_d(\mathbf{v}) = 0\} = \cap_{i=1}^d \ker(\ell_i).$$

因为 $\dim(\ker(\ell_i)) \geq n-1$, 所以 $\dim(W) \geq n-d$ (见上学期第二章第二讲例 *2.17*).

8. (10分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵且 $\mathrm{rank}(A) > 0$. 证明:

(i) (5分) 如果 A 半正定, 则 A 的对角线上存在一个正实数;

(ii) (5分) 如果 A 不定, 则存在一个对角线上元素都等于零的矩阵与 A 合同.

证明. 设 $A = (a_{i,j})_{n\times n}$.

(i) 因为 A 半正定, 所以 A 的对角线上元素非负. 假设对角线上元素都等于零. 则 $\mathrm{rank}(A) > 0$ 蕴含存在 $a_{i,j} \neq 0$, 其中 $i \neq j$. 进而

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a_{i,j} \\ a_{i,j} & 0 \end{pmatrix} = -a_{i,j}^2 < 0.$$

故 A 不是半正定的. 矛盾.

(ii) 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的二次型 $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. 则 q 在某组基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ 下的规范型是

$$q(\mathbf{y}) = y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_{k+l}^2.$$

因为 q 是不定的, 所以 $k > 0$ 且 $\ell > 0$. 令

$$\mathbf{e}_i' = \epsilon_i - \epsilon_{k+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

和

$$\mathbf{e}_j' = \epsilon_1 + \epsilon_j, \quad j = k+1, \ldots, k+\ell.$$

再设

$$\mathbf{e}_s' = \epsilon_s, \quad s = k+\ell+1, k+\ell+2, \ldots, n.$$

则
$$q(\mathbf{e}_i') = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$
注意到
$$(\mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_k', \mathbf{e}_{k+1}', \dots, \mathbf{e}_{k+\ell}', \mathbf{e}_{k+\ell+1}', \dots, \mathbf{e}_n') = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_{k+\ell}, \epsilon_{k+\ell+1}, \dots, \epsilon_n)P,$$
其中
$$P = \begin{pmatrix} E_k & \begin{pmatrix} 1, \dots, 1 \\ O_{(k-1)\times \ell} \end{pmatrix} & O_{k\times(n-k-\ell)} \\ \begin{pmatrix} -1, \dots, -1 \\ O_{(\ell-1)\times k} \end{pmatrix} & E_\ell & O_{\ell\times(n-k-\ell)} \\ O_{(n-k-\ell)\times k} & O_{(n-k-\ell)\times \ell} & E_{n-k-\ell} \end{pmatrix}.$$
直接计算得 $\det(P) \neq 0$. 故 $(\mathbf{e}_1', \dots, \mathbf{e}_k', \mathbf{e}_{k+1}', \dots, \mathbf{e}_{k+\ell}', \mathbf{e}_{k+\ell+1}', \dots, \mathbf{e}_n')$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 根据 (1), q 在该基下的矩阵 B 的对角线元素都等于零. 我们有 $A \sim_c B$.