1. (10分) 设复数矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. 计算 A 的每个特征根和特征子空间的维数，并判断 A 是否能对角化.

证明: 直接计算得

$$\chi_A=((t+1)(t-3)+4)(t-2)=(t^2-2t+1)(t-2)=(t-1)^2(t-2).$$

故 A 有两个特征根 $\lambda_1=1$ 和 $\lambda_2=2$. 设

$$A_1=(\lambda_1 E-A)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank}(A_1)=2$, 所以 $\dim V^{\lambda_1}=1$. 设

$$A_2=(\lambda_2 E-A)=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank}(A_2)=2$, 所以 $\dim V^{\lambda_2}=1$. 因为

$$\dim(V^{\lambda_1})+\dim(V^{\lambda_2})=2<3,$$

所以 A 不可对角化. □

2. (10分) 设复数方阵 A 的特征多项式是 $(t-1)^4t$, J_A 是其 Jordan 标准型

 (i) 设 $\operatorname{rank}(A-E)=2$. 计算 J_A 并说明理由.

 (ii) 设 $\operatorname{rank}(A-E)=3$ 和 $\operatorname{rank}((A-E)^2)=1$. 计算 J_A 并说明理由.

解. 因为 $\deg(\chi_A)=5$, 所以 A 是 *5* 阶方阵. 因为特征根 *0* 的代数重数是 *1*, 所以 J_A 中的对角线上有且仅有一个 *0*.

(i) 因为 $\operatorname{rank}(A-E)=2$, 所以特征根 *1* 的几何重数是 3. 由此可知, J_A 中有三个关于 1 的 *Jordan* 块. 故 $J_A=\operatorname{diag}(1,1,J_2(1),0)$.

(ii) 因为特征根 *1* 的几何重数是 2, 所以在 J_A 中有两个关于 1 的 *Jordan* 块. 在 J_A 中 $J_1(1)$ 的个数是 $5+1-2\times 3=0$. 故 $J_A=(J_2(1),J_2(1),0)$ □

3. (10分) 设标准欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 中的子空间 U 是方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$ 的解空间. 计算 U 的维数和正交补 $U^\perp$ 的一组单位正交基.

解. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

因为 $\mathrm{rank}(A)=2$, 所以 $\dim(U)=4-2=2$.

正交补的一组基是 $\vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t$. 对 $\vec{A}_1^t$ 单位化得 $\mathbf{e}_1=(1/2,1/2,1/2,1/2)^t$. 因为 $\vec{A}_1^t \perp \vec{A}_2^t$, 所以对 $\vec{A}_2^t$ 单位化得

$$\mathbf{e}_2=(1/2,-1/2,1/2,-1/2)^t,$$

且 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 是 $U^\perp$ 得一组单位正交基. □

注: 单位正交基的答案不唯一.

4. (10分) 设实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

已知 A 的特征多项式等于 $(t-1)^2(t-10)$. 计算正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $P^tAP=D$.

解. 直接计算

$$\mathrm{rank}(E-A)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}=1.$$

故特征根 1 对应的特征子空间 V_1 有基底: $(2,-1,0)^t,(0,1,1)^t$.

注意到特征值 *10* 对应的特征子空间是 $V_1^\perp$. 故它有基底 $(-1,-2,2)^t$.

通过 *Gram-Schmidt* 单位正交化得

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

则 P 是正交矩阵且 $P^tAP=\mathrm{diag}(1,1,10)$. □

注: 矩阵 P 的答案不唯一.

5. (10分) 设实方阵 A 的特征多项式是 t^2-t+1. 计算 A 的极小多项式和 A^3, 并说明理由.

解. 由 *Cayley-Hamilton* 定理可知, $\mu_A|\chi_A$. 因为 $\mu_A\in\mathbb{R}[x]$ 且 χ_A 无实根, 所以 $\mu_A=\chi_A$.

同理 $A^2=A-E$. 故 $A^3=A^2-A=A-E-A=-E$. □

6. (10分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的可逆线性算子. 证明:

 (i) 如果 λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征根, 则 $\lambda\neq 0$ 且 λ^{-1} 是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征根;

 (ii) 对任意 $\mathbf{v}\in V$, $\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v})=\dim(F[\mathcal{A}^{-1}]\cdot\mathbf{v})$.

证明*: (i)* 设 $\mathbf{v}$ 是关于 λ 的特征向量. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$. 因为 $\mathcal{A}$ 可逆且 $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, 所以 $\lambda\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. 我们得到 $\lambda\neq 0$. 由 $\mathcal{A}(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$ 可知 $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{v})=\lambda^{-1}\mathbf{v}$. 故 λ^{-1} 是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征根.

(ii) 设 $d=\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v})$. 则 $\mathbf{v},\mathcal{A}(\mathbf{v}),\ldots,\mathcal{A}^{d-1}(\mathbf{v})$ 是 $F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}$ 的一组基. 设

$$\alpha_0\mathbf{v}+\alpha_1\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{v})+\cdots+\alpha_{d-1}\mathcal{A}^{-(d-1)}(\mathbf{v})=\mathbf{0},$$

其中 $\alpha_0,\ldots,\alpha_{d-1}\in F$. 则

$$\alpha_0\mathcal{A}^{d-1}(\mathbf{v})+\alpha_1\mathcal{A}^{d-2}(\mathbf{v})+\cdots+\alpha_{d-1}\mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

故 $\alpha_0=\cdots=\alpha_{d-1}=0$. 于是, $\mathbf{v},\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{v}),\ldots,\mathcal{A}^{-(d-1)}(\mathbf{v})$ 线性无关. 由此可知 $\dim F[\mathcal{A}^{-1}]\cdot\mathbf{v}\geq d$. 互换 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^{-1}$ 的位置可得, $\dim F[\mathcal{A}^{-1}]\cdot\mathbf{v}\leq d$. 故 $\dim F[\mathcal{A}^{-1}]=d$. □

注. *(ii)* 的另解

 (a) 由矩阵求逆的多项式法可推出 $\mathcal{A}^{-1}\in F[\mathcal{A}]$. 故 $F[\mathcal{A}^{-1}]\subset F[\mathcal{A}]$. 从而,

$$F[\mathcal{A}^{-1}]\cdot\mathbf{v}\subset F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}.$$

 因为 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的逆, 所以同理可得

$$F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}\subset F[\mathcal{A}^{-1}]\cdot\mathbf{v}.$$

 我们证明了

$$F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}=F[\mathcal{A}^{-1}]\cdot\mathbf{v}.$$

 于是, 这两个循环子空间维数相同.

(b) 设 $d = \dim F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$. 则 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ 中的元素是 $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \ldots, \mathcal{A}^{d-1}(\mathbf{v})$ 的线性组合. 从而 $\mathcal{A}^{-(d-1)}$ 是从 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ 到 $F[\mathcal{A}^{-1}] \cdot \mathbf{v}$ 的线性单射. 故

$$d \le \dim(F[\mathcal{A}^{-1}] \cdot \mathbf{v}).$$

类似可证

$$d \ge \dim(F[\mathcal{A}^{-1}] \cdot \mathbf{v}).$$

7. (10分) 设 A 是 n 阶复矩阵. 证明以下三个断言等价:

(i) A 的 Jordan 标准型中不含阶数大于 1 的幂零 Jordan 块;

(ii) t^2 不是 A 的极小多项式的因子;

(iii) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^2)$.

证明. *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*. 设 t 在 $\mu_A(t)$ 中的重数是 m. 则在 J_A 中幂零 *Jordan* 块的最大阶数等于 m. 由 *(i)* 可知 $m < 2$. 故 $t^2 \nmid \mu_A$.

(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)*. 注意到 *(ii)* 蕴含 *(i)*. 根据 *(i)*, 我们有 A 可逆或:

$$J_A = \begin{pmatrix} O & O \\ O & * \end{pmatrix},$$

其中 $*$ 是一个可逆方阵. 故 $\mathrm{rank}(J_A) = \mathrm{rank}(J_A^2)$. 从而 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^2)$.

(iii) $\Longrightarrow$ *(i)*. 如果 A 可逆, 则 J_A 不含任何幂零 *Jordan* 块. 设 $\mathrm{rank}(A) < n$. 则 J_A 中一阶幂零 *Jordan* 块的个数等于

$$n + \mathrm{rank}(A^2) - 2\mathrm{rank}(A) = n - \mathrm{rank}(A).$$

它是特征根 0 的几何重数. 该重数等于 J_A 中所有幂零矩阵的个数. 故 J_A 中不可能有大于一阶的幂零 *Jordan* 块. □

8. (10分) 设 V 是 n 维欧式空间, U 是 V 的 d 维子空间, 其中 $0 < d < n$. 再设映射 $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ 把 V 中的任意向量映到它在 U 上的正交投影. 证明:

(i) $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子;

(ii) 算子 $\mathcal{A}$ 的特征根是 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 0$, 且 $V^{\lambda_1} = U$ 和 $V^{\lambda_2} = U^{\perp}$.

证明. *(i)* 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 是 U 的一组单位正交基. 则

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}\colon & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \sum_{i=1}^{d} (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i. \end{array} \tag{1}$$

因为 $(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)$ 关于 $\mathbf{x}$ 是线性的, 所以 $\mathcal{A}$ 是线性算子.

(ii) 把上述 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 扩充为 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$. 则 $\mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \in U^{\perp}$. 因为 $V = U \oplus U^{\perp}$, 所以 $\dim U^{\perp} = n - d$. 故

$$U^{\perp} = \langle \mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle.$$

由 (1) 可知, $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是

$$A = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{d}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-d}).$$

因为 $0 < d < n$, 所以 $\mathcal{A}$ 的特征根是 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 0$. 由 (1) 可知,

$$V^{\lambda_1} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d \rangle \quad 和 \quad V^{\lambda_2} = \langle \mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle.$$

故 $U = V^{\lambda_1}$ 且 $U^{\perp} = V^{\lambda_2}$. □

9. (10分) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是斜对称的.

   (i) 证明: $\det(E + A) \geq 1$, 其中 E 是 n 阶单位方阵.

   (ii) 再设 $B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明: $\det(A + B) \geq \det(B)$.

证明. *(i)* 存在正交矩阵 P 使得

$$P^t A P = \operatorname{diag}\left(N(0, \beta_1), \ldots, N(0, \beta_s), 0, \ldots, 0\right).$$

于是,

$$P^t(E + A)P = P^t \operatorname{diag}\left(N(1, \beta_1), \ldots, N(1, \beta_s), 1, \ldots, 1\right) P.$$

两边同时取行列式得 $\det(E + A) = (1 + \beta_1^2) \cdots (1 + \beta_s^2) \cdot 1 \cdots 1 \geq 1$.

(ii) 存在可逆矩阵 Q 使得 $Q^t B Q = E$. 令 $C = Q^t A Q$. 则 C 斜对称. 我们有

$$|C + E| = |Q|^2 |A + B| \overset{(i)}{\Longrightarrow} |A + B| \geq |Q|^{-2}$$

且

$$Q^t B Q = E \Longrightarrow |B| = |Q|^{-2}.$$

由上述两式可知 $\det(A + B) \geq \det(B)$. □

10. (10分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, 其中 $n > 0$. 设

- $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子, 其极小多项式为 $\mu_{\mathcal{A}} \in F[t]$;
- 对任意 $\mathbf{v} \in V$, 设 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}} \in F[t] \setminus \{0\}$ 是次数最小的首一多项式使得 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$;
- $S = \{\mathbf{v} \in V \mid \deg(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}}) < \deg(\mu_{\mathcal{A}})\}$.

证明:

(i) $S = \{\mathbf{0}\}$ 当且仅当 $\mu_{\mathcal{A}}$ 不可约;

(ii) S 是有限个 $\mathcal{A}$-子空间的并.

证明: *(i)* 注意到 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}} \mid \mu_{\mathcal{A}}$. 如果 $\mu_{\mathcal{A}}$ 不可约. 则 $\deg \mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}} < \deg \mu_{\mathcal{A}}$ 蕴含 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}} \in F \setminus \{\mathbf{0}\}$. 故 $S = \{\mathbf{0}\}$. 反之, 设 $S = \{\mathbf{0}\}$. 如果 $\mu_{\mathcal{A}}$ 可约, 则存在 $p, q \in F[t] \setminus F$ 使得 $\mu_{\mathcal{A}} = pq$. 根据 $\mu_{\mathcal{A}}$ 的定义和 $0 < \deg q < \deg \mu_{\mathcal{A}}$ 可知, 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{w} = q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. 因为

$$p(\mathcal{A})(\mathbf{w}) = p(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

所以

$$\deg \mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}} \leq \deg p < \deg \mu_{\mathcal{A}}.$$

我们有 $\mathbf{w} \in S$, 矛盾.

(ii) 设 $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$, 其中 $p_1, \ldots, p_s \in F[t] \setminus F$ 首一, 不可约, 两两互素, $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{Z}^+$. 令 $K_i = \ker(q_i(\mathcal{A}))$, 其中 $q_i := \mu_{\mathcal{A}}/p_i \in F[t]$, $i = 1, \ldots, s$. 则 K_i 是 $\mathcal{A}$-子空间. 如果 $\mathbf{v} \in K_i$, 则 $q_i(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{v} \in S$. 于是, $K_i \subset S$. 由此可知, $K_1 \cup \cdots \cup K_s \subset S$. 反之, 设 $\mathbf{v} \in S$. 因为 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}} \mid \mu_{\mathcal{A}}$ 且 $\deg \mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}} < \deg \mu_{\mathcal{A}}$, 所以存在 $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ 使得 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}} \mid q_i$. 故 $\mathbf{v} \in K_i$. 进而 $S \subset K_1 \cup \cdots \cup K_s$. □