

## 第三章 内积空间

### 4 正规算子和正规矩阵

记号：在本节中  $V$  是  $n$  维欧式空间, 其中  $n > 0$ .

#### 4.1 伴随算子

**定义 4.1** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 如果算子  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$  满足对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ,  $(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y}))$ , 则称  $\mathcal{B}$  是  $\mathcal{A}$  的伴随算子.

**命题 4.2** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 则  $\mathcal{A}$  的伴随算子存在且唯一. 如果  $\mathcal{A}$  在  $V$  的单位正交基  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵等于  $A$ , 则其伴随算子在该基下的矩阵等于  $A^t$ .

**证明.** 设  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$  使得它在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵等于  $A^t$ . 则对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}|\mathcal{B}(\mathbf{y})) &= (x_1, \dots, x_n)A^t(y_1, \dots, y_n)^t \\ &= (y_1, \dots, y_n)A(x_1, \dots, x_n)^t \\ &= (\mathbf{y}|\mathcal{A}(\mathbf{x})) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}).\end{aligned}$$

于是,  $\mathcal{B}$  是  $\mathcal{A}$  的伴随算子.

设  $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V)$  是  $\mathcal{A}$  的另一个伴随算子. 设  $A = (a_{i,j})$  和  $\mathcal{C}$  在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵等于  $C = (c_{i,j})$ . 则

$$a_{i,j} = (\mathbf{e}_i|\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)) = (\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)|\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_j|\mathcal{C}(\mathbf{e}_i)) = c_{j,i},$$

其中,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . 故  $C = A^t$ . 从而,  $C = B$ .  $\square$

根据上述命题, 我们把  $\mathcal{A}$  的伴随算子记为  $\mathcal{A}^*$ .

## 4.2 正规算子

**定义 4.3** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 如果  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ , 则称  $\mathcal{A}$  是正规算子. 类似地, 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . 如果  $AA^t = A^tA$ , 则称  $A$  是正规矩阵.

**命题 4.4** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\mathcal{A}$  在  $V$  的单位正交基  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵为  $A$ . 则  $\mathcal{A}$  正规当且仅当  $A$  正规.

**证明.** 由命题 4.2,  $\mathcal{A}^*$  在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵为  $A^t$ . 由第二章第一讲定理 2.1,  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$  和  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵分别是  $AA^t$  和  $A^tA$ . 有矩阵表示的唯一性可知 (见第二章第一讲第 1.1 节),  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$  当且仅当  $AA^t = A^tA$ .  $\square$

**定义 4.5** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 如果  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ , 则称  $\mathcal{A}$  是对称算子. 如果  $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ , 则称  $\mathcal{A}$  是斜对称算子.

对称和斜对称算子都是正规算子. 显然, 对称和斜对称矩阵都是正规矩阵.

**命题 4.6** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\mathcal{A}$  在  $V$  的单位正交基  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵为  $A$ . 则  $\mathcal{A}$  (斜)对称算子当且仅当  $A$  (斜)对称矩阵.

证明. 由命题 4.2,  $A^*$  在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵为  $A^t$ . 于是,  $A^* = A$  当且仅当  $A^t = A$ ;  $A^* = -A$  当且仅当  $A^t = -A$ ;  $\square$

例 4.7 证明正交矩阵是正规矩阵.

证明. 设  $P \in O_n(\mathbb{R})$ . 则  $P^t P = E = P P^t$ .  $\square$

定义 4.8 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 如果对于任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

则称  $\mathcal{A}$  是保内(积)的.

命题 4.9 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\mathcal{A}$  在  $V$  的单位正交基  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵为  $A$ . 则下列断言等价

(i)  $\mathcal{A}$  保内;

(ii)  $A \in O_n(\mathbb{R})$ ;

(iii) 对任意  $\mathbf{x} \in V$ ,  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$  (保长);

(iv) 对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|$  (保距).

证明. (i)  $\implies$  (ii). 对任意  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\delta_{i,j} = (\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = ((\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)\vec{A}^{(i)}|(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)\vec{A}^{(j)}) = (\vec{A}^{(i)})^t \vec{A}^{(j)}.$$

于是,  $A^t A = E$ . 即  $A \in O_n(\mathbb{R})$ .

(ii)  $\implies$  (iii). 设  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ . 我们计算

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2 &= (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{x})) = ((\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) \\ &= (x_1, \dots, x_n)A^t A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 + \cdots + x_n^2.\end{aligned}$$

于是,  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$ .

(iii)  $\implies$  (iv) 对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , 我们有

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|.$$

(iv)  $\implies$  (i) 对任意  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , 我们有

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2 \Rightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{y}|\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y})).$$

于是,

$$\|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2 - 2(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y})) + \|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2.$$

注意到  $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{0})\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2$ . 同理  $\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2$ . 由上式可得  $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y}))$ .  $\square$

**注解 4.10** 因为正交矩阵是正规矩阵(见例 4.7), 所以保内算子是正规算子. 它也称为正交(保长、保距)算子.

### 4.3 正规算子的不可分子空间分解

引理 4.11 设  $n$  阶实方阵

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O_{(n-k) \times k} & D \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } B \in M_k(\mathbb{R}).$$

如果  $A$  正规, 则  $C = O_{k \times (n-k)}$ .

证明. 因为  $A^t A = A A^t$ , 所以

$$\begin{pmatrix} B^t & O \\ C^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^t & O \\ C^t & D^t \end{pmatrix}.$$

于是,  $B^t B = B B^t + C C^t$ . 由此得出,

$$\operatorname{tr}(B^t B) = \operatorname{tr}(B B^t + C C^t) = \operatorname{tr}(B B^t) + \operatorname{tr}(C C^t).$$

因为矩阵的迹是交换不变量, 所以  $\operatorname{tr}(B B^t) = \operatorname{tr}(B^t B)$ . 故  $\operatorname{tr}(C C^t) = 0$ . 故  $C = O_{d \times (n-d)}$ .  $\square$

引理 4.12 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  是正规算子,  $W \subset V$  是  $\mathcal{A}$ -子空间. 则

(i)  $W^\perp$  是  $\mathcal{A}$ -子空间;

(ii)  $\mathcal{A}$  在  $W$  上的限制算子  $\mathcal{A}_W$  是正规算子.

证明. (i) 设  $n = \dim(V)$  且  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$  是  $W$  的一组单位正交基. 根据第三章第二讲定理 2.2 (ii),  $V = W \oplus W^\perp$ . 于是,

$\dim(W^\perp) = n - k$ . 设  $\epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_n$  是  $W^\perp$  的一组单位正交基. 则  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_n$  是  $V$  的一组单位正交基. 因为  $W$  是  $\mathcal{A}$ -不变的, 所以  $\mathcal{A}$  在  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_n$  下的矩阵等于

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

其中  $B \in M_k(\mathbb{R})$ . 因为  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_n$  是单位正交基且  $\mathcal{A}$  是正规算子, 所以  $A$  正规 (第三章第二讲命题 5.4). 根据引理 4.11,  $C = O_{k \times (n-k)}$ . 于是,

$$(\mathcal{A}(\epsilon_{k+1}), \dots, \mathcal{A}(\epsilon_n)) = (\epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_n)D.$$

故  $W^\perp$  也是  $\mathcal{A}$ -不变的.

(ii) 由 (i) 的证明可知,

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

因为  $AA^t = A^tA$ , 所以  $BB^t = B^tB$ . 由此得出  $B$  是正规矩阵. 而  $B$  是  $\mathcal{A}_W$  在单位正交基  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$  下的矩阵. 根据第三章第二讲命题 4.4,  $\mathcal{A}_W$  正规.  $\square$

**引理 4.13** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 则  $V$  有一维或二维的  $\mathcal{A}$  子空间.

证明. 因为  $\mathbb{R}[t]$  中的非平凡不可约多项式的次数都不大于 2 (第一学期第五章第三讲推论 4.10), 所以  $\mu_{\mathcal{A}} = pq$ , 其

中  $p, q \in \mathbb{R}[t]$ ,  $0 < \deg(p) \leq 2$ ,  $p$  在  $\mathbb{R}[t]$  中不可约. 因为  $\deg(q) < \deg(\mu_{\mathcal{A}})$ , 所以  $q(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$ . 于是, 存在  $\mathbf{v} \in V$  使得  $\mathbf{w} := q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ . 设  $W = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$ . 则  $\dim(W) > 0$ . 因为

$$p(\mathcal{A})(\mathbf{w}) = p(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mu_{\mathcal{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

所以  $\deg(\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{w}}) \leq 2$ . 从而  $\dim(W) \leq 2$  (第二章第四讲命题 9.2 (iii)).  $\square$

**注解 4.14** 上述引理只需  $V$  是  $\mathbb{R}$  上有限维线性空间即可 (见柯斯特利金书 64 页定理 7).

**定理 4.15** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  正规,  $n = \dim(V)$ . 则

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s \oplus U_{2s+1} \oplus \cdots \oplus U_n,$$

其中

- (i)  $U_1, \dots, U_s$  是二维  $\mathcal{A}$ -不可分子空间;
- (ii)  $U_{2s+1}, \dots, U_n$  是一维  $\mathcal{A}$ -不可分子空间;
- (iii)  $U_1, \dots, U_s, U_{2s+1}, \dots, U_n$  两两正交.

证明. 对  $\dim(V)$  归纳. 当  $\dim(V) = 1$  时, 设  $s = 0$ ,  $U_1 = V$  即可. 设  $1 \leq \dim(V) < n$  时定理成立. 由引理 4.13, 存在  $\mathcal{A}$ -子空间  $U$  使得  $0 < \dim(U) \leq 2$ . 如果  $\dim(U) = 1$ , 则  $U$ -是  $\mathcal{A}$ -不可分的. 如果  $\dim(U) = 2$  但  $U$  是  $\mathcal{A}$ -可分的, 则

$U$  中有一维  $\mathcal{A}$  不变子空间. 于是, 不妨设  $U$  是  $V$  中维数不超过 2 的  $\mathcal{A}$ -不可分子空间.

根据引理 4.12,  $V = U \oplus U^\perp$  且  $\mathcal{A}_{U^\perp}$  是  $U^\perp$  上的正规算子. 根据归纳假设,  $U^\perp$  是两两正交的维数不大于 2 的  $\mathcal{A}_{U^\perp}$ -不变子空间之和. 又因为  $U$  与  $U^\perp$  中的任何子空间都正交, 所以定理成立.  $\square$

#### 4.4 正规算子和正规矩阵的标准型

设  $\dim(V)=1$  且任意的  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  都是正规算子. 这是因为对  $V$  中的单位向量  $\mathbf{v}$ ,  $\mathcal{A}(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$ , 其中  $\lambda$  是某个实数.

**引理 4.16** 设  $\dim(V) = 2$ ,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  正规, 且  $V$  是  $\mathcal{A}$ -不可分的. 则  $\mathcal{A}$  在  $V$  的任意单位正交基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

其中  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  且  $\beta \neq 0$ .

证明. 设  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  是  $V$  的一组单位正交基,  $A$  是  $\mathcal{A}$  在  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  下的矩阵. 则  $A$  正规. 设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

由  $A^t A = A A^t$  得

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

于是,

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \\ ab + cd = ac + bd \\ b^2 + d^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \implies \begin{cases} c^2 = b^2 \\ ab + cd = ac + bd \end{cases}$$

情形 1.  $b = c$ . 则  $\chi_A = t^2 - (a+d)t + ad - b^2$ . 其判别式是  $(a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$ . 故  $\mathcal{A}$  有实特征根  $\lambda$ . 设  $\mathbf{v}$  是  $\lambda$  的一个特征向量. 则  $\langle \mathbf{v} \rangle$  是  $\mathcal{A}$ -子空间. 于是,  $V = \langle \mathbf{v} \rangle \oplus \langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ . 根据引理 4.12,  $V$  是  $\mathcal{A}$ -可分的, 矛盾.

情形 2.  $b = -c$  且  $c \neq 0$ . 则  $a = d$ . 故

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

直接验证可得  $A$  是正规的.  $\square$

我们把矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

记为  $N(\alpha, \beta)$ , 其中  $\beta \neq 0$ .





**命题 4.19** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  正规,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{spec}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$  且  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . 则  $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$ .

证明. 设  $\mathbf{v}_2 \in V^{\lambda_2}$ . 因为  $V^{\lambda_1}$  是  $\mathcal{A}$ -不变的, 所以上述引理蕴含  $(V^{\lambda_1})^\perp$  也是  $\mathcal{A}$  不变的. 因为  $V = V^{\lambda_1} \oplus (V^{\lambda_1})^\perp$ , 所以

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{w},$$

其中  $\mathbf{v}_1 \in V^{\lambda_1}$ ,  $\mathbf{w} \in (V^{\lambda_1})^\perp$ . 把上式两侧作用  $\mathcal{A}$  得

$$\lambda_2 \mathbf{v}_2 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mathcal{A}(\mathbf{w}).$$

故

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 \mathbf{w} - \mathcal{A}(\mathbf{w})) = \mathbf{0}.$$

因为  $(\lambda_2 \mathbf{w} - \mathcal{A}(\mathbf{w})) \in (V^{\lambda_1})^\perp$ , 所以  $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ . 因为  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 所以  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ . 于是,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$ . 故  $\mathbf{v}_2 \perp V^{\lambda_1}$ .  $\square$

## 5 对称算子和对称矩阵

### 5.1 实对称矩阵的正交标准型

**定理 5.1** (i) 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  对称. 则  $\mathcal{A}$  在  $V$  的某组单位正交基下的矩阵是  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , 其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  不必两两不同.

(ii) 设  $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ . 则  $A \sim_o \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , 其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  不必两两不同.



(ii) 设  $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ . 求  $P \in O_n(\mathbb{R})$  使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

基本步骤.

1. 计算  $\mathcal{A}$  的特征根. 设互不相同的特征根是  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ;
2. 对  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 求  $V^{\lambda_i}$  的一组基;
3. 对  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , 利用 Gram-Schmidt 正交化求  $V^{\lambda_i}$  的一组单位正交基;  $\mathbf{e}_{i,1}, \dots, \mathbf{e}_{i,d_i}$
4. 根据命题 4.19 和对角化判别法II,  $\mathbf{e}_{1,1}, \dots, \mathbf{e}_{1,d_1}, \dots, \mathbf{e}_{k,1}, \dots, \mathbf{e}_{k,d_k}$  是  $V$  的一组单位正交基且在该基下  $\mathcal{A}$  的矩阵是对角的.

对于对称矩阵, 只需把它看成标准欧式空间上的线性算子即可.

**例 5.2** 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SM}_4(\mathbb{R}).$$

计算  $P \in O_4(\mathbb{R})$  和对角阵  $B$  使得  $B = P^{-1}AP$ .

解. 由计算机计算得  $\chi_A(t) = (t-1)^3(t+3)$ . 于是,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -3$ . 计算  $V^{\lambda_1}$  的一组基. 已知  $\dim(V^{\lambda_1}) = 3$ . 于是,  $\text{rank}(\lambda_1 E - A) = 1$ . 我们只要考虑方程

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

的解空间即可. 直接得出

$$V^{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

计算  $V^{\lambda_2}$  的一组基. 因为  $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$  且  $\mathbb{R}^4 = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$ , 所以  $V^{\lambda_2} = (V^{\lambda_1})^\perp$ . 由此可知,

$$V^{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

利用 Gram-Schmidt 正交化求  $V^{\lambda_1}$  的一组单位正交基得

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)^t, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)^t, \quad \epsilon_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^t.$$

利用 Gram-Schmidt 正交化求  $V^{\lambda_2}$  的一组单位正交基得:

$\epsilon_4 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^t$ . 故

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

我们得到  $P^tAP = \text{diag}(1, 1, 1, -3)$ .  $\square$

**推论 5.3** 设  $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ . 则  $A$  的正(负)惯性指数等于  $A$  中正(负)根的个数(在记重数的意义下). 特别地,  $A$  (半)正定当且仅当  $A$  的特征根都是正的(非负的).

证明. 由定理 5.1 (ii) 和 (iii),  $A \sim_o \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . 因为  $A \sim_c \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , 所以  $A$  的签名与  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  的签名相同.  $\square$

**定理 5.4** 设  $A, B \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$  且  $A$  正定. 则存在  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  使得  $P^tAP = E$  和  $P^tBP$  是对角阵.

证明. 因为  $A$  正定, 所以存在  $P_1 \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  使得  $P_1^tAP_1 = E$  (惯性定理). 令  $C = P_1^tBP_1$ . 则  $C$  对称. 根据第三章第三讲定理 6.1 (ii), 存在  $P_2 \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ , 使得  $D = P_2^tCP_2$  是对角阵. 令  $P = P_1P_2$ . 则  $P^tBP = P_2^tCP_2 = D$  且

$$P^tAP = P_2^tEP_2 = P_2^tP_2 = E (\because P_2 \in \text{O}_n(\mathbb{R})). \quad \square$$









于是, 存在  $j \in \{2s + 1, \dots, n\}$  使得  $\lambda_j = -1$ . 故  $-1$  是  $M$  的特征根. 于是,  $-1$  也是  $P$  的特征根. 我们有  $\det(E + P) = 0$ .