

第三章 内积空间

注解 1.20 根据 *Gram-Schmidt* 正交化, 我们有

$$\epsilon_i \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i \rangle \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_i = \langle \epsilon_1, \dots, \epsilon_i \rangle.$$

故存在上三角的矩阵 $S, T \in M_k(\mathbb{R})$ 使得

$$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)S \quad \text{和} \quad (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)T.$$

因为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ 是两组线性无关的向量, 所以 S, T 都是可逆的. 下面证明:

$$T = \begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1|\epsilon_1) & (\mathbf{v}_2|\epsilon_1) & \cdots & (\mathbf{v}_k|\epsilon_1) \\ & (\mathbf{v}_2|\epsilon_2) & \cdots & (\mathbf{v}_k|\epsilon_2) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (\mathbf{v}_k|\epsilon_k) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

设 $T = (t_{i,j})_{k \times k}$. 因为 T 是上三角形矩阵, 所以

$$\mathbf{v}_j = t_{1,j}\epsilon_1 + \cdots + t_{j,j}\epsilon_j.$$

设 $i \in \{1, 2, \dots, j\}$. 我们计算

$$(\mathbf{v}_j|\epsilon_i) = \left(\sum_{\ell=1}^j t_{\ell,j}(\epsilon_\ell|\epsilon_i) \right) = \sum_{\ell=1}^j t_{\ell,j}(\epsilon_\ell|\epsilon_i) = t_{i,j}.$$

于是, (1) 成立. \square

命题 1.21 设 V 的一组单位正交基是 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 在这组基下的坐标分别是 $(x_1, \dots, x_n)^t$ 和 $(y_1, \dots, y_n)^t$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n.$$

证明. 因为 $G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = E_n$, 所以第三章第一讲命题 1.7 蕴含结论. \square

命题 1.22 设 V 的一组单位正交基是 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{x} \in V$. 则 \mathbf{x} 在该基下的第 i 个坐标分量是 $(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

证明. 设 \mathbf{x} 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的坐标是 $(x_1, \dots, x_n)^t$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i) = \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j | \mathbf{e}_i \right) = \sum_{j=1}^n x_j (\mathbf{e}_j | \mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^n x_j \delta_{j,i} = x_i. \quad \square$$

例 1.23 设 V 和 W 是两个 n -维欧氏空间, 其中的内积分别记为 $(|)_V$ 和 $(|)_W$. 则存在线性同构 $\phi: V \rightarrow W$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})_V = (\phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{y}))_W.$$

证明. 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基, 而 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是 W 的一组单位正交基. 则存在线性映射 ϕ 使得

$$\phi(\mathbf{e}_i) = \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(第一章第二讲定理 4.11). 进而, ϕ 是线性同构(第一章第二讲定理 4.12 的证明). 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$. 根据命题 1.21,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})_V = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

因为 $\phi(\mathbf{x}) = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n$ 和 $\phi(\mathbf{y}) = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_n\epsilon_n$, 所以命题 1.21 蕴含

$$(\phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{y}))_W = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

我们有 $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_V = (\phi(\mathbf{x})|\phi(\mathbf{y}))_W$. \square

2 正交投影和正交补

定义 2.1 设 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{x} \in V$. 称

$$\left(\mathbf{x} \mid \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

为 \mathbf{x} 在 \mathbf{v} 上的投影.

命题 2.2 设 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{x} \in V$, \mathbf{y} 是 \mathbf{x} 在 \mathbf{v} 上的投影. 则 $(\mathbf{v} - \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$.

证明: 设 $\mathbf{w} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. 则 $(\mathbf{w}|\mathbf{w}) = 1$ 且 $\mathbf{y} = (\mathbf{x}|\mathbf{w})\mathbf{w}$. 直接计算得:

$$(\mathbf{v} - \mathbf{y}|\mathbf{y}) = (\mathbf{v}|\mathbf{y}) - (\mathbf{y}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{w})(\mathbf{v}|\mathbf{w}) - (\mathbf{x}|\mathbf{w})^2(\mathbf{w}|\mathbf{w}) = 0. \quad \square$$

记号. 设 $X, Y \subset V$. 如果对任意的 $\mathbf{x} \in X$ 和 $\mathbf{y} \in Y$ 都有 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. 则称 X 与 Y 正交. 记为 $X \perp Y$. 当 $X = \{\mathbf{x}\}$ 时, $X \perp Y$ 也记为 $\mathbf{x} \perp Y$.

命题 2.3 设 $U \subset V$ 是子空间, $\mathbf{x} \in V$. 则存在唯一的 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \perp U$.

证明. 如果 $U = \{\mathbf{0}\}$, 则令 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 即可. 否则, 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ 是 U 的一组单位正交基. 令 $\mathbf{u} = (\mathbf{x}|\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (\mathbf{x}|\mathbf{e}_d)\mathbf{e}_d$. 则 $\mathbf{u} \in U$. 则 $(\mathbf{x} - \mathbf{u}|\mathbf{e}_i) = (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i) - (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i) = 0, i = 1, 2, \dots, d$. 因为 $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ 与 U 的一组基底中的每个元素都正交, 所以 $(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \perp U$.

再设 $\mathbf{v} \in U$ 使得 $(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \perp U$. 则 $(\mathbf{v}|\mathbf{e}_i) = (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i), i = 1, 2, \dots, d$. 于是, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ (命题 1.22). \square

注解 2.4 称上述命题中的 \mathbf{u} 是 \mathbf{x} 在子空间 U 上的正交投影. 向量 \mathbf{x} 在 $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上的投影就是 \mathbf{x} 在 $\langle \mathbf{v} \rangle$ 上的正交投影.

定理 2.5 设 $U \subset V$ 是子空间. 令 $U^\perp := \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \perp U\}$. 则

(i) U^\perp 是子空间且 $U \perp U^\perp$;

(ii) $V = U \oplus U^\perp$ (称 U^\perp 是 U 的正交补).

(iii) $(U^\perp)^\perp = U$.

证明. (i) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U^\perp$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 则对任意 $\mathbf{u} \in U$,

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}|\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{y}|\mathbf{u}) = 0.$$

于是, $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \perp \mathbf{u}$. 我们得到 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U^\perp$. 由 U^\perp 的定义可知, $U \perp U^\perp$.

(ii) 设 $\mathbf{x} \in U \cap U^\perp$. 则 $\mathbf{x} \perp \mathbf{x} = 0$. 于是, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (第三章引理 1.15 (i)). 我们只要证明 $V = U + U^\perp$ 即可. 设 $\mathbf{x} \in V$, \mathbf{u} 是 \mathbf{x} 在 U 上的正交投影. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{u} \in U^\perp$ (命题 2.2). 故 $\mathbf{x} \in U + U^\perp$. 从而, $V = U \oplus U^\perp$.

(iii) 由正交补得定义可知 $U \subset (U^\perp)^\perp$. 根据 (ii),

$$V = U \oplus U^\perp = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp.$$

于是, $\dim(U) = \dim((U^\perp)^\perp)$ (直和的维数公式). 根据第一章第二讲命题 4.12 (i), 我们得到 $U = (U^\perp)^\perp$. \square

推论 2.6 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ 是 V 中的单位正交向量. 则 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ 可扩充为 V 的一组单位正交基.

证明. 设 $U = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d \rangle$. 则 U^\perp 有一组单位正交基 $\mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$. 根据定理 2.5, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基. \square

例 2.7 设标准欧式空间 \mathbb{R}^3 的标准基是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. 则

$$\langle \mathbf{e}_1 \rangle^\perp = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \quad \langle \mathbf{e}_1 \rangle^{\perp\perp} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle^\perp = \langle \mathbf{e}_1 \rangle. \quad \square$$

例 2.8 设 \mathbb{R}^4 是标准欧式空间,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

计算子空间 $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle^\perp$ 的一组基.

解. 注意到 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle^\perp$ 当且仅当 $(\mathbf{x}|\mathbf{u}_1) = (\mathbf{x}|\mathbf{u}_2) = (\mathbf{x}|\mathbf{u}_3) = 0$. 即

$$(\mathbf{u}_1^t, \mathbf{u}_2^t, \mathbf{u}_3^t)\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

换言之, $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle^\perp$ 是上述方程组的解空间. 直接计算该解空间的基是 $(0, 1, 0, -1)^t$. \square

例 2.9 设标准欧式空间 \mathbb{R}^3 中子空间 U 是方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

的解空间. 求 U^\perp 的一组基.

解. 上述方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

由方程组可知 $\vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t \in U^\perp$. 因为 $\text{rank}(A) + \dim(U) = 3$, 所以 $U^\perp = \langle \vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t \rangle$. (定理 2.5). 因为 $\text{rank}(A) = 2$, 所以 U^\perp 的一组基是 \vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t . \square

3 正交矩阵与正交等价

设欧式空间 V 由两组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, 矩阵 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 满足 $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P$. 则对任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 我们有

$$\delta_{i,j} = (\epsilon_i | \epsilon_j) = ((\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \vec{P}^{(i)} | (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \vec{P}^{(j)}) = (\vec{P}^{(i)})^t \vec{P}^{(j)}.$$

由此得出 $P^t P = E$, 进而 $P P^t = E$.

定义 3.1 设 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. 如果 $P^t = P^{-1}$, 则称 P 是正交矩阵. 所有 n 阶正交矩阵的集合记为 $O_n(\mathbb{R})$.

显然, E 是正交矩阵.

命题 3.2 集合 $O_n(\mathbb{R})$ 是 $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ 的子群.

证明. 根据第一学期第四章第一讲命题 2.24, 只要证明对任意 $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$, $PQ^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. 我们计算

$$(PQ^{-1})^t (PQ^{-1}) = (Q^{-1})^t P^t P Q^{-1} = (Q^t)^t Q^{-1} = Q Q^{-1} = E.$$

于是, $(PQ^{-1})^t = (PQ^{-1})^{-1}$. \square

命题 3.3 (i) 如果 $P \in O_n(\mathbb{R})$, 则 $\det(P) = \pm 1$.

(ii) $P \in O_n(\mathbb{R})$ 当且仅当 P 的列向量是标准欧式空间 \mathbb{R}^n 中的一组单位正交基.

(iii) $P \in O_n(\mathbb{R})$ 当且仅当 P 的行向量是标准欧式空间 $\mathbb{R}^{1 \times n}$ 中的一组单位正交基.

证明. (i) 因为 $P^t P = 1$, 所以 $\det(P^t P) = 1$. 于是,

$$\det(P^t) \det(P) = \det(P)^2 = 1.$$

故 $\det(P) = \pm 1$.

(ii) 对任意 $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$(\vec{P}^i | \vec{P}^j) = \delta_{i,j} \iff (\vec{P}^i)^t \vec{P}^j = \delta_{i,j} \iff P^t P = 1.$$

(iii) 考虑矩阵 P^t 即可. \square

例 3.4 证明: $P \in O_2(\mathbb{R})$ 当且仅当存在 θ 使得

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

证明. 设

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

是正交矩阵. 由命题 3.3 (ii) 可知, $a^2 + c^2 = 1$ 可知. 我们不妨设 $a = \cos(\theta)$. 则 $c = \pm \sin(\theta)$. 由命题 3.3 (iii) 可

知, $a^2 + b^2 = 1$. 于是, $b = \pm \sin(\theta)$. 同理 $c^2 + d^2 = 1$ 得出 $d = \pm \cos(\theta)$.

情形 1. $c = \sin(\theta)$, $b = -\sin(\theta)$. 由 $ab + cd = 0$ 得出 $d = \cos(\theta)$. 此时

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

情形 2. $c = \sin(\theta)$, $b = \sin(\theta)$. 由 $ab + cd = 0$ 得出 $d = -\cos(\theta)$. 此时

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

其它情形可在上述情形中把 θ 换为 $-\theta$ 得到. \square

命题 3.5 设欧式空间 V 由基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, 矩阵 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 满足 $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P$. 再设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是单位正交基. 则 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是单位正交基当且仅当 $P \in O_n(\mathbb{R})$.

证明. 设 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是单位正交基. 由引进正交矩阵的概念的推导过程可知, $P \in O_n(\mathbb{R})$. 反之, 设 $P \in O_n(\mathbb{R})$. 对任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$(\epsilon_i | \epsilon_j) = ((\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \vec{P}^{(i)} | (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \vec{P}^{(j)}) = (\vec{P}^{(i)})^t \vec{P}^{(j)} = \delta_{i,j}.$$

故 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是单位正交基. \square

设 V 有两组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$. 则存在唯一的 $P \in O_n(\mathbb{R})$ 使得 $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)P$. 设 $A \in \mathcal{L}(V)$ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B . 根据第二章第一讲第 2.2 节第一段,

$$B = P^{-1}AP = P^tAP \quad (\because P \in O_n(\mathbb{R})).$$

定义 3.6 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 如果存在 $P \in O_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 A 与 B 正交等价(正交相似), 记为 $A \sim_o B$.

我们来验证 \sim_o 是等价关系. 因为 $E \in O_n(\mathbb{R})$, 所以对任意 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = E^{-1}AE$. 故 $A \sim_o A$. 自反性成立.

设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 满足 $A \sim_o B$. 则存在 $P \in O_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 于是, $A = PBP^{-1}$. 根据命题 3.2, $P^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, 我们得到 $B \sim_o A$. 对称性成立.

再设 $C \in M_n(\mathbb{R})$ 且 $A \sim_o B$ 和 $B \sim_o C$. 则存在 $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^{-1}AP$ 和 $C = Q^{-1}BQ$. 于是, $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$. 根据命题 3.2, $PQ \in O_n(\mathbb{R})$. 故 $A \sim_o C$. 传递律成立. 验证完毕.

注解 3.7 符号如定义 3.6, 如果 $A \sim_o B$, 则 $A \sim_s B$ 且 $A \sim_c B$. 这是因为正交矩阵的逆和转置相等. 由此可得, 矩阵的相似不变量和合同不变量都是正交等价的不变量.

例 3.8 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

证明: $A \sim_s B$, $A \sim_c B$ 但 $A \not\sim_o B$.

证明. 显然 $\chi_A = \chi_B = t^2$. 因为 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ 且 $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(B^2)$. 根据相似判定法则 I, $A \sim_s B$. 设 $P = \text{diag}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. 则 $P^t A P = B$. 于是, $A \sim_c B$.

假设存在 $Q \in O_2(\mathbb{R})$ 使得 $Q^t A Q = B$. 根据例 3.4, 我们有

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

如果 Q 为前者, 则 $AQ = QB$ 蕴含

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\sin(\theta) = 0$ 且 $\cos(\theta) = 0$. 矛盾. 类似地可证明 Q 也不可能等于后者. \square

问题. 给定 $A \in M_n(\mathbb{R})$,

1. 求它在正交等价下的标准型.
2. 给定 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 判定它们是否正交等价.