Jordan 块的若干基本性质如下.

注解 10.2

(i) 如果 $\lambda\neq 0$, 则 $\operatorname{rank}(J_n(\lambda))=n$. 而 $\operatorname{rank}(J_n(0))=n-1$;

(ii) $J_n(\lambda) = \lambda E_n + J_n(0)$;

(iii) $J_n(\lambda)$ 的极小和特征多项式都等于 $(t-\lambda)^n$; 从而把 $J_n(\lambda)$ 看成 $\mathbb{C}^n$ 上的算子后, $\mathbb{C}^n$ 是 $J_n(\lambda)$-循环的;

(iv) $J_n(\lambda)$ 的唯一的特征值是 λ, 而对应的特征子空间的维数等于 1, 这是因为

$$J_n(\lambda) - \lambda E_n = J_n(0),$$

其秩等于 $n-1$.

(v) $J_n(\lambda)$ 可对角化当且仅当 $n=1$.

定理 10.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $d_1,\ldots,d_k\in\mathbb{Z}^+$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{C}$, 都不必两两不同.

证明. 由循环子空间分解（上一讲定理 9.3）可知

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

其中 W_i 是 d_i-维 $\mathcal{A}$-不可分子空间, $i = 1, 2, \ldots, k$. 由上一讲引理 9.13 和代数学基本定理, $\mathcal{A}_{W_i}$ 的极小多项式是 $(t - \lambda_i)^{d_i}$. 根据引理 10.1, $\mathcal{A}_{W_i}$ 在 W_i 的某组基下的矩阵是 $J_{d_i}(\lambda_i)$. 再由第二章第三讲定理 5.9, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 10.4 设 $\mathcal{D} : \mathbb{C}[x]^{(n)} \longrightarrow \mathbb{C}[x]^{(n)}$ 是导数算子. 计算 $\mathcal{D}$ 的 *Jordan* 标准型.

解. 由上一讲例 *9.15*, $\mathbb{C}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$-不可分的. 于是, $\mathcal{D}$ 的 *Jordan* 标准型是 $J_n(0)$. 注意到

$$\mathbb{C}[x]^{(n)} = \mathbb{C}[\mathcal{D}] \cdot x^{n-1}.$$

由引理 *10.1* 可知 $\mathcal{D}$ 在基底

$$\mathcal{D}^{n-j}(x^{n-1}) = \frac{(n-1)!}{j!} x^j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

下的矩阵是 $J_n(0)$. $\square$

推论 10.5 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 则 A 相似于

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

其中 $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, 都不必两两不同.

例 10.6 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

- $n = 1$. $(a) = J_1(a)$.
- $n = 2$. 设 $\chi_A = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$. 如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则根据第二章第四讲推论 *8.8*,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. 如果 $\mu_A = t - \lambda$, 则根据可对角化判别法*(V)*可知,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 \\ 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t - \lambda)^2$, 则 A 对应循环算子*(*第二章第四讲定理 *9.11)*. 再根据不可分子空间判别法, F^2 是

A-不可分的. 于是

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_2(\lambda).$$

- $n=3$. 设 $\chi_A = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互不相同, 则根据第二章第四讲推论 *8.8*,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\lambda_3) \end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$. 如果 $\mu_A = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$, 则根据可对角化判别法 V,

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)^2$, 则 A 对应循环算子*(*第二章第四讲定理 *9.11)*. 再根据不可分子空间判别法, F^3 不是 A-不可分的. 故

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & O_{1\times 2} \\ O_{2\times 1} & J_2(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=:\lambda$. 如果 $\mu_A=t-\lambda$, 则根据可对角化判别法*(V)*,

$$A\sim_s \lambda E_3=\begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 & 0\\ 0 & J_1(\lambda) & 0\\ 0 & 0 & J_1(\lambda)\end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A=(t-\lambda)^2$, 则 A 对应算子不是循环的*(*第二章第四讲定理 *9.11)*. 再根据不可分子空间判别法, F^3 不是 A-不可分的. 故

$$A\sim_s \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_1(\lambda) & O\\ O & J_2(\lambda)\end{pmatrix}.$$

如果 $\mu_A=(t-\lambda)^3$, 则 A 对应算子是循环的*(*第二章第四讲定理 *9.11)*. 再根据不可分子空间判别法, F^3 是 A-不可分的,

$$A\sim_s \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=J_3(\lambda).$$

例 10.7 设

$$J_2(0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}J_2(0) & O\\ O & O\end{pmatrix}_{4\times 4},\quad B=\begin{pmatrix}J_2(0) & O\\ O & J_2(0)\end{pmatrix}.$$

则 $\mu_A = \mu_B = t^2$ 且 $\chi_A = \chi_B = t^4$. 通过极小多项式和特征多项式, 我们仍无法在相似的意义下区分 A 和 B. 注意到 $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}(B)$. 于是, $A \not\sim_s B$.

$J_{\mathcal{A}}$ 中的矩阵称为 $\mathcal{A}$ 的一个 *Jordan* 标准型. $J_{\mathcal{A}}$ 的基本性质如下:

注解 10.8 *(i)* $\operatorname{rank}(J_{\mathcal{A}}) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rank}(J_{d_i}(\lambda_i))$;

(ii) $J_{\mathcal{A}}$ 的(也是 $\mathcal{A}$ 的)极小多项式等于

$$\operatorname{lcm}((t-\lambda_1)^{d_1}, \ldots, (t-\lambda_k)^{d_k});$$

特征多项式等于

$$(t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_k)^{d_k};$$

(iii) 设 $\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$. 则 $J_{\mathcal{A}}$ 中至少有一个关于 λ 的 *Jordan* 块.

(iv) λ 的代数重数等于 λ 在 $J_{\mathcal{A}}$ 主对角线上出现的次数; λ 的几何重数等于关于 λ 的 *Jordan* 块在 $J_{\mathcal{A}}$ 中出现的次数;

(v) λ 在极小多项式中的重数等于 $J_{\mathcal{A}}$ 中关于 λ 的 *Jordan* 块出现的最大阶数.

(vi) $\mathcal{A}$ 可对角化当且仅当 $d_1 = \cdots = d_k = 1$.

性质 (i) 来自 J_A 是分块对角矩阵.

性质 (ii) 成立是因为第二章第三讲定理 5.9 和第二章第三讲例 7.14.

性质 (iii) 成立是因为 $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.

性质 (iv) 中的第一部分可由 (i) 中特征多项式的形式直接得出. 下面来验证性质 (iv) 的第二部分. 注意到

$$J_A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) - \lambda E_{d_1} & O & \cdots & O \\ O & J_{d_2}(\lambda_2) - \lambda E_{d_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) - \lambda E_{d_k} \end{pmatrix}.$$

因为

$$\operatorname{rank}(J_{d_i}(\lambda_i) - \lambda E_{d_i}) = \begin{cases} d_i, & \lambda \neq \lambda_i, \\ d_i - 1, & \lambda = \lambda_i, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, k$. 于是,

$$\operatorname{rank}(J_A - \lambda E_n) = n - (J_A \text{ 中关于 } \lambda \text{ 的 Jordan 块出现的次数}).$$

由此和矩阵的秩和解空间维数的关系得出 $\dim(V^\lambda)$ 等于 J_A 中关于 λ 的 Jordan 块出现的次数. 于是, (iv) 成立.

性质 (v) 来自于 (i) 中极小多项式的形式.

最后, 我们来验证性质 (vi). 如果 $d_1 = \cdots = d_k = 1$, 则 J_A 可对角化. 于是, A 可对角化. 反之, A 可对角化蕴含

μ_A 中每个因子的重数都等于 1 (对角化判别法 V). 由性质 (v), J_A 是对角阵.

例 10.9 设 $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

计算 J_A.

解. 直接计算得 $\chi_A = (t-\alpha)^3$. 于是, α 是 A 唯一的特征根, 其代数重数等于 *3*.

$$\operatorname{rank}(A - \alpha E) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此看出, 当 $\alpha \neq 0$ 时, $\operatorname{rank}(A - \alpha E) = 1$. 故 α 的几何重数等于 *2*. 由基本性质 *(iv)*,

$$J_A = \begin{pmatrix} J_2(\alpha) & O \\ O & J_1(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

当 $\alpha = 0$ 时, $\operatorname{rank}(A - \alpha E) = 0$. 故 α 的几何重数等于 *3*. 由基本性质 *(iv)*,

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(0) \end{pmatrix} = O_{3\times 3}. \quad \square$$

例 10.10 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

计算 J_A.

解. 直接计算得 $\chi_A=(t-2)(t-1)^2$. 于是, 2 的代数和几何重数都等于 *1*. 故 $J_1(2)$ 在 J_A 中出现一次. 注意到 1 的几何重数等于

$$3-\operatorname{rank}(A-E)=3-\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=1.$$

故 $J_2(1)$ 在 J_A 中出现一次. 由此得出

$$J_A=\begin{pmatrix}J_1(2)&O\\O&J_2(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.\quad\square$$

例 10.11 设 $S\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 满足 $S^2-nS=O$. 求 J_S.

解. 设 $f(t)=t(t-n)$. 则 $f(A)=O$.

情形 1: $\mu_S=t$. $S=O=J_S$.

情形 2: $\mu_S=t-n$. $S=nE_n=J_S$.

情形 3: $\mu_S=t(t-n)$. 因为 $n\neq 0$, 所以 S 可对角化(判别

法V). 于是

$$J_S = \begin{pmatrix} nE_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $r = \operatorname{rank}(S)$.

例 10.12 设 $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{C})$, $\operatorname{rank}(A) = 3$, $\operatorname{rank}(A^2) = 2$, $\operatorname{rank}(A+E) = 4$ 和 $\operatorname{rank}((A+E)^2) = 3$. 求 J_A.

解. 因为 $\operatorname{rank}(A) = 3 < 5$, 所以 0 是 A 的特征根且几何重数为 2. 故 J_A 中有两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块. 因为 $\operatorname{rank}(A+E) = 4 < 5$, 所以 -1 是 A 的特征根且几何重数为 1. 故 J_A 中有一个以 -1 为特征根的 *Jordan* 块.

下面我们来分析 J_A 中 *Jordan* 块的阶数.

设出现在 J_A 中的两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块是 $J_1(0)$ 和 $J_1(0)$. 则

$$J_A = \begin{pmatrix} O_{2\times 2} & \\ & B \end{pmatrix} = P^{-1}AP,$$

其中 $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ 和 $P \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$. 则

$$\operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}(J_A^2) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} O_{2\times 2} & \\ & B^2 \end{pmatrix} = 3 \neq 2,$$

矛盾.

设出现在 J_A 中的两个以 0 为特征根的 *Jordan* 块是 $J_1(0)$ 和 $J_2(0)$. 则

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_2(0) & \\ & & C \end{pmatrix} = P^{-1}AP,$$

其中 $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 和 $P \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$. 直接计算得

$$\mathrm{rank}(A^2) = 2.$$

如果 $C = J_2(-1)$, 则

$$J_A + E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & J_2(1) & \\ & & J_2(0) \end{pmatrix}.$$

我们有 $\mathrm{rank}(J_A + E)$=4 和 $\mathrm{rank}((J_A + E)^2)$=3. 因为

$$J_A + E = P^{-1}(A + E)P \Longrightarrow \mathrm{rank}((A + E)^2) = \mathrm{rank}(J_A^2),$$

关于 $\mathbb{C}$ 上 Jordan 标准型尚不知道的秘密:

(i) 唯一性是否成立?

(ii) 关于特征值 λ 的 Jordan 块的阶是多少?

11　初等因子组

记号: 除非特别说明, 在本节中 V 是 F 上的 n 维线性空间, 其中 F 是任意域.

重集 是指元素可以重复出现的集合.

例 11.1 设 $S = \{a, a, b\}$ 和 $T = \{a, b\}$. 它们作为重集不相等. 元素 a 在 S 中的重数等于 2, 在 T 中等于 1.

例 11.2 我们由素分解 $24 = 2^3 3$. 利用重集表示 *24* 的素因子为 $\{2, 2, 2, 3\}$.

定义 11.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \tag{2}$$

是 V 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解. 令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{W_i}$ 和 $\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$. 重集 $\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 (2) 的初等因子组.

由上一讲引理 10.5 可知, 初等因子组中的元素都是 $F[t]$ 中(首一)不可约多项式的幂次. 类似地, 我们可以定义矩阵的初等因子组.

例 11.4 设 $\mathcal{E}$ 是 V 上的恒同算子, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 则

$$V = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{e}_n \rangle,$$

是 V 的一个 $\mathcal{E}$-不可分子空间的直和分解. 算子 $\mathcal{E}$ 关于上述直和分解的初等因子组是

$$\{\underbrace{t-1,\ldots,t-1}_{n}\}.$$

例 11.5 设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 上的导数算子. 则 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$-不可分的. 于是, $\mathcal{D}$ 的初等因子组是 $\{t^n\}$.

在本节中, 我们将说明以下结论:

(i) 对于任何 V 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解, 初等因子组相同;

(ii) 当 $F=\mathbb{C}$ 时, 初等因子组唯一确定 Jordan 标准型;

(iii) 初等因子组可以通过计算若干矩阵的秩得到.

引理 11.6 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $f\in F[t]$. 设

$$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_\ell, \tag{3}$$

其中 $U_1,\ldots,U_\ell$ 是 $\mathcal{A}$-不变的子空间. 则

$$f(\mathcal{A})(V)=f(\mathcal{A})(U_1)\oplus\cdots\oplus f(\mathcal{A})(U_\ell).$$

证明. 设 $W=f(\mathcal{A})(U_1)+\cdots+f(\mathcal{A})(U_\ell)$. 因为 $U_i\subset V$, 所以 $f(\mathcal{A})(U_i)\subset f(\mathcal{A})(V)$. 于是, $W\subset f(\mathcal{A})(V)$. 反之, 设 $\mathbf{x}\in f(\mathcal{A})(V)$. 则存在 $\mathbf{v}\in V$ 使得 $\mathbf{x}=f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$. 由 (3) 可知

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\cdots+\mathbf{v}_\ell,$$

其中 $\mathbf{v}_i \in U_i, i=1,2,\ldots,\ell$. 由此得出

$$\mathbf{x} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_\ell).$$

因为 U_i 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}_i) \in U_i$. 故 $\mathbf{x} \in W$. 我们得到 $f(\mathcal{A})(V) = W$.

下面验证: $f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$ 是直和. 设

$$\mathbf{0} = \mathbf{w}_1 + \cdots + \mathbf{w}_\ell,$$

其中 $\mathbf{w}_i \in f(\mathcal{A})(U_i)$. 则 $\mathbf{w}_i \in U_i$. 由 (3) 可知, $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$, $i=1,2,\ldots,\ell$ (第一章第二讲命题 4.16). 进而, 同样的命题蕴含 $f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_\ell)$ 是直和. □

引理 11.7 *设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t] \setminus F$. 则*

$$\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k) = \begin{cases} (m-k)\deg(p), & 0 \le k \le m \\ 0, & k > m. \end{cases}$$

证明. 当 $k \ge m$ 时, $p^k(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 故 $\operatorname{rank}(p^k(\mathcal{A})) = 0$.

下面设 $k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$, $\mathbf{v} \in V$ 是 $\mathcal{A}$-循环向量, 且 $\mathbf{w}_k = p(\mathcal{A})^k(\mathbf{v})$.

断言 1. $\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A})) = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$.

断言 1 的证明. 设 $\mathbf{x} \in V$. 则存在 $f \in F[t]$ 使得 $\mathbf{x} = f(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ (第二章第四讲命题 9.2 (i)). 于是,

$$p^k(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = p^k(\mathcal{A}) f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A}) p(\mathcal{A})^k(\mathbf{v}) = f(\mathcal{A})(\mathbf{w}_k) \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k.$$

由此得出, $\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A})) \subset F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$. 反之, 由 $\mathbf{w}_k$ 的定义可知, $\mathbf{w}_k \in \operatorname{im}(p^k(\mathcal{A}))$. 因为 $\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A}))$ 是 $\mathcal{A}$-不变的(第二章第三讲命题 5.5), 所以 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k \subset \operatorname{im}(p^k(\mathcal{A}))$. 断言 1 成立.

断言 2. 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w}_k$ 上的限制算子, 则 $\mu_{\mathcal{B}}=p^{m-k}$.

断言 2 的证明. 设 $\mathbf{x} \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}_k$. 则存在 $g \in F[t]$ 使得

$$\mathbf{x} = g(\mathcal{B})p^k(\mathcal{B})(\mathbf{v}) \implies p^{m-k}(\mathcal{B})(\mathbf{x}) = g(\mathcal{B})p^m(\mathcal{B})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

故 $p^{m-k}(\mathcal{B}) = \mathcal{O}$. 故 $\mu_{\mathcal{B}}|p^{m-k}$. 反之, $\mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathcal{O}$ 蕴含

$$\mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0} \implies \mu_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})p^k(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \implies (\mu_{\mathcal{B}}p^k)(\mathcal{A}) = \mathcal{O}.$$

故 $\mu_{\mathcal{A}}|(\mu_{\mathcal{B}}p^k)$. 从而 $p^{m-k}|\mu_{\mathcal{B}}$. 综上所述, 断言 2 成立.

断言 1 和 2, 以及第二章第五讲定理 9.8 蕴含

$$\dim(\operatorname{im}(p^k(\mathcal{A}))) = (m-k)\deg(p).$$

根据第二章第一讲推论 1.14, $\operatorname{rank}(p^k(\mathcal{A}))=(m-k)\deg(p)$. □

定理 11.8 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t] \setminus F$ 不可约. 对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, 设 n_ℓ 是 p^ℓ 在 V 的某个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解的初等因子组中 p^ℓ 的重数. 令 $d = \deg(p)$ 和 $r_i = \operatorname{rank}(p^i(\mathcal{A})), i \in \mathbb{N}$. 则

$$n_\ell = \frac{1}{d}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell). \tag{4}$$

证明. 设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \tag{5}$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解. 设 $\mathcal{A}_i{=}\mathcal{A}_{V_i}$ 和 $\mu_i{=}\mu_{\mathcal{A}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 则存在 $m_1, \ldots, m_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ 使得 $\mu_1 = p^{m_1}$, $\mu_2 = p^{m_2}$, $\ldots$, $\mu_k = p^{m_k}$. (见第二章第三讲定理 5.9). 由第二章第五讲定理 9.8 和第二章第五讲引理 9.15, $\dim(V_i) = m_i d$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 特别地, $\dim(V_i) \le md$. 令 $\mathbb{S}{=}\{V_1, \ldots, V_k\}$. 则 n_ℓ 是 $\mathbb{S}$ 中维数为 ℓd 的子空间的个数.

对 $j \in \{1, \ldots, m\}$, 令 $\mathbb{S}_j = \{U \in \mathbb{S} \mid \dim(U) = jd\}$. 则 (5) 可重写为

$$V = \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} U \right). \tag{6}$$

根据引理 11.6, 我们有

$$p(\mathcal{A})^\ell(V) = \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^\ell(U) \right).$$

注意到当 $U \in \mathbb{S}_j$ 时, U 不但是 $\mathcal{A}$-循环的且 $\mathcal{A}|_U$ 的极小多项式是 p^j. 根据引理 11.7, 当 $j > \ell$ 时,

$$\operatorname{rank}(p^\ell(\mathcal{A}|_U)) = (j - \ell)d \tag{7}$$

且当 $j \le \ell$ 时, $p(\mathcal{A})^\ell(U){=}\{\mathbf{0}\}$. 特别地, 上式可缩写为

$$p(\mathcal{A})^\ell(V) = \bigoplus_{j=\ell+1}^{m} \left(\bigoplus_{U \in \mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^\ell(U) \right). \tag{8}$$

我们运用维数和秩的关系推导：

$$
\begin{aligned}
r_\ell &= \dim\big(p(\mathcal{A})^\ell(V)\big) \quad (r_\ell \text{ 的定义}) \\
&= \dim\left(\bigoplus_{j=\ell+1}^{m}\left(\bigoplus_{U\in\mathbb{S}_j} p(\mathcal{A})^\ell(U)\right)\right) \quad (\text{根据 }(8)) \\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m}\left(\sum_{U\in\mathbb{S}_j}\dim(p(\mathcal{A})^\ell(U))\right) \quad (\text{第一章第二讲命题 }4.15) \\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m}\left(\sum_{U\in\mathbb{S}_j}\operatorname{rank}(p(\mathcal{A}_U)^\ell)\right) \quad (\text{限制算子和第二章第一讲推论 }1.14) \\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m}\left(\sum_{U\in\mathbb{S}_j}(j-\ell)d\right) \quad ((7)) \\
&= \sum_{j=\ell+1}^{m} n_j(j-\ell)d \quad (n_j \text{ 的定义})
\end{aligned}
$$

对任意 $\ell\in\mathbb{Z}^+$ 成立. 令 $r_0=\dim(V)$. 则由上式和 (10), 我们有

$$
r_\ell = d\sum_{j=\ell+1}^{m} n_j(j-\ell) \tag{9}
$$

对任意 $\ell\in\mathbb{N}$ 成立.

我们要利用 (9) 把 $n_1, n_2, \ldots,$ 用 $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots,$ 表示出来. 根据 (9) 可知, 对任意 $\ell\in\mathbb{Z}^+$

$$
r_{\ell-1} = d\left(n_\ell + 2n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j(j-\ell+1)\right),
$$

$$r_\ell = d\left(n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j(j-\ell)\right),$$

和

$$r_{\ell+1} = d\left(\sum_{j=\ell+2}^{m} n_j(j-\ell-1)\right).$$

于是,

$$r_{\ell-1}-r_\ell = d\left(n_\ell + n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j\right), \quad r_\ell - r_{\ell+1} = d\left(n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j\right)$$

即

$$(r_{\ell-1}-r_\ell)-(r_\ell-r_{\ell+1}) = dn_\ell \implies n_\ell = \frac{1}{d}(r_{\ell-1}+r_{\ell+1}-2r_\ell). \quad \square$$

例 11.9 设

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 & 5 \\ 5 & -1 & 8 & -7 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & -11 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}).$$

已知 $\chi_A = t^4$. 计算 J_A.

解. $r_0 = \mathrm{rank}(A^0) = 4$, $r_1 = \mathrm{rank}(A) = 2$. 于是, 0 的几何

重数等于 2. 由此得出 J_A 中有两个关于 0 的 *Jordan* 块.

$$r_2 = \operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 1.$$

于是

$$n_1 = 4 + 1 - 2 \times 2 = 1.$$

由此直接推出 $n_2 = 0$, $n_3 = 1$, $n_4 = 0$. 故

$$J_A = \begin{pmatrix} J_3(0) & \\ & J_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 11.10 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的两两互素首一的不可约因子是 $p_1, \ldots, p_s$, 它们的次数分别是 $d_1, \ldots, d_s$. 设 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $N(i, \ell)$ 是 p_i^ℓ 在 V 的某个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解的初等因子组中的重数. 则

$$N(i, \ell) = \frac{1}{d_i}(R(i, \ell - 1) + R(i, \ell + 1) - 2R(i, \ell)),$$

其中 $R(i, j) = \operatorname{rank}(p_i(\mathcal{A})^j)$, $j \in \mathbb{N}$. 特别地, 任何 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解初等因子组都相等(称为 $\mathcal{A}$ 的初等因子组).

证明. 设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \tag{10}$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解. 注意到对 $j = 1, 2, \ldots, k$, $\mu_j = \mu_{A_{V_j}}$ 是某个 $p_1, \ldots, p_s$ 的幂次. 我们不妨对 $i = 1$ 来证明定理的结论.

设 $\mathbb{S} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ 且 $\mathbb{S}_1 = \{U \in \mathbb{S} \mid p_1 \mid \mu_{\mathcal{A}_U}\}$. 令

$$W = \bigoplus_{U \in \mathbb{S}_1} U \quad \text{和} \quad \widetilde{W} = \bigoplus_{U \in (\mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_1)} U.$$

则

$$V = W \oplus \widetilde{W}. \tag{11}$$

断言 *1.* 对任意 $\ell \in \mathbb{N}$, 令 $r_\ell = \operatorname{rank}(p_1(\mathcal{A}_W)^\ell)$. 则

$$N(1, \ell) = \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell).$$

断言 *1* 的证明. 注意到 $\mathcal{A}_W$ 是 W 上的线性算子,

$$W = \bigoplus_{U \in \mathbb{S}_1} U$$

是 W 的 A_W-不可分子空间分解, 且 $\mathcal{A}_W$ 的极小多项式是 p_1 的某个幂次, 根据定理 11.8, p_1^ℓ 在 $\mathcal{A}_W$ 关于上述 W 的直和分解的初等因子组中出现的重数

$$n_\ell = \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell).$$

再注意到对任意 $U \in (\mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_1)$, $\mathcal{A}_U$ 的极小多项式都不是 p_1 的任何幂次. 于是 $N(1, \ell) = n_\ell$. 断言 1 成立.

断言 *2.* $p_1(\mathcal{A})|_{\widetilde{W}}$ 上可逆.

断言 *2* 的证明. 设 $\mu_{\mathcal{A}_W} = p_1^m$ 且 $q = \mu_{\mathcal{A}_{\widetilde{W}}}$. 因为 q 是 $p_2, \ldots p_s$ 的幂次之积 (第二章第二讲定理 6.9), 所以 p_1^m 与 q 互素. 于是 $\mu_{\mathcal{A}} = \operatorname{lcm}(p_1^m, q) = p_1^m q$ (第二章第二讲引理 6.7 和 定理 5.3). 根据 Bezout 关系, 存在 $a, b \in F[t]$ 使得 $a(t)p^m(t) + b(t)q(t) = 1$. 故 $a(\mathcal{A})p^m(\mathcal{A}) + b(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$. 因为 $q(\mathcal{A})$ 限制在 $\tilde{W}$ 上是零算子, 所以对任意 $\mathbf{x} \in \tilde{W}$, $a(\mathcal{A})p^m(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. 故 $p^m(\mathcal{A})$ 在 $\tilde{W}$ 可逆. 进而, $p(\mathcal{A})$ 在 $\tilde{W}$ 上也可逆. 断言 2 成立.

断言 *3.* 对任意 $\ell \in \mathbb{N}$, $R(1, \ell) = r_\ell + \dim(\widetilde{W})$.

断言 *3* 的证明. 由引理 11.6,

$$p_1(\mathcal{A})^\ell(V) = p_1(\mathcal{A})^\ell(W) \oplus p_1(\mathcal{A})^\ell(\widetilde{W}).$$

于是,

$$\dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(V)) = \dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(W)) + \dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(\widetilde{W})).$$

根据断言 2, $\dim(p_1(\mathcal{A})^\ell(V)) = \dim(p_1(\mathcal{A}_W)^\ell(W)) + \dim(\widetilde{W})$. 故 $R(1, \ell) = r_\ell + \dim(\widetilde{W})$. 断言 3 成立.

对任意 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, 我们计算

$$
\begin{aligned}
N(1,\ell) &= \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell) \text{ (断言 1)} \\
&= \frac{1}{d_1}(r_{\ell-1} + \dim(\widetilde{W}) + r_{\ell+1} \dim(\widetilde{W}) - 2(r_\ell + \dim(\widetilde{W}))) \\
&= \frac{1}{d_1}(R(1,\ell-1) + R(1,\ell+1) - 2R(1,\ell)) \text{ (断言 3)}.
\end{aligned}
$$

由上述公式看出, 初等因子组只与 $p_i(\mathcal{A})^\ell$ 有关. 故初等因子组独立于 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解的选择. $\square$