

## 第二章 线性算子

### 9 循环子空间

**定义 9.1** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  和  $\mathbf{v} \in V$ . 由  $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \mathcal{A}^2(\mathbf{v}), \dots$  生成的子空间称为由  $\mathcal{A}$  和  $\mathbf{v}$  生成的循环子空间. 记为  $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$

**命题 9.2** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  和  $\mathbf{v} \in V$ .

(i)  $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v} = \{p(\mathcal{A})(\mathbf{v}) \mid p(t) \in F[t]\};$

(ii)  $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$  是  $\mathcal{A}$ -不变的;

(iii) 设  $d = \deg(\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{v}})$ . 则  $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\mathbf{v})$  是  $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$  的一组基. 特别地,  $d = \dim(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v})$ .

**证明.** (i) 设

$$p = p_k t^k + p_{k-1} t^{k-1} + \dots + p_0,$$

其中  $p_k, p_{k-1}, \dots, p_0 \in F$ . 则

$$\begin{aligned} p(\mathcal{A})(\mathbf{v}) &= (p_k \mathcal{A}^k + p_{k-1} \mathcal{A}^{k-1} + \dots + p_0 \mathcal{E})(\mathbf{v}) \\ &= p_k \mathcal{A}^k(\mathbf{v}) + p_{k-1} \mathcal{A}^{k-1}(\mathbf{v}) + \dots + p_0 \mathbf{v} \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

反之, 设  $\mathbf{w} \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ . 则存在  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in F$  使得  $\mathbf{w} = \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i \mathcal{A}^i(\mathbf{v})$ . 令  $q(t) = \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i t^i$ . 则

$$\mathbf{w} = q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) \in \{p(\mathcal{A})(\mathbf{v}) \mid p(t) \in F[t]\}.$$

(ii) 设  $\mathbf{w} \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ . 根据 (i), 存在  $p \in F[t]$  使得  $\mathbf{w} = p(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ . 于是,

$$\mathcal{A}(\mathbf{w}) = \mathcal{A}p(\mathcal{A})(\mathbf{v}).$$

令  $q = tp$ . 则  $\mathcal{A}(\mathbf{w}) = q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ .

(iii) 设  $\mathbf{w} \in F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ . 根据 (i), 存在  $p \in F[t]$  使得  $\mathbf{w} = p(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ . 由多项式带余除法, 存在  $q, r \in F[t]$  满足  $\deg(r) < d$  和

$$p(t) = q(t)\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{v}}(t) + r(t) \implies p(\mathcal{A}) = q(\mathcal{A})\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{v}}(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}).$$

作用到  $\mathbf{v}$  上得

$$\mathbf{w} = p(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = q(\mathcal{A})\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{v}}(\mathcal{A})(\mathbf{v}) + r(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = r(\mathcal{A})(\mathbf{v}).$$

因为  $\deg(r) < d$ , 所以  $\mathbf{w}$  是  $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\mathbf{v})$  在  $F$  上的线性组合. 于是,

$$F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\mathbf{v}) \rangle.$$

再设  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1} \in F$  使得  $\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i \mathcal{A}^i(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . 令

$$f = \alpha_{d-1}t^{d-1} + \dots + \alpha_1t + \alpha_0.$$

则  $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . 因为  $\deg f < d$ , 所以  $f(t) = 0$ , 即

$$\alpha_{d-1} = \cdots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0.$$

于是,  $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\mathbf{v})$  线性无关.  $\square$

**例 9.3** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 如果  $\mathbf{v}$  是  $\mathcal{A}$  的特征向量. 则

$$F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle.$$

证明. 设  $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ , 其中  $\lambda \in F$ . 则  $\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{v}} = t - \lambda$ . 由上述命题 (iii),  $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle$ .  $\square$

**例 9.4** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  和  $d = \deg \mu_{\mathcal{A}}$ . 则存在  $\mathbf{v} \in V$  使得

$$\dim (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}) = d,$$

且不存在维数大于  $d$  的  $\mathcal{A}$ -循环子空间.

证明. 根据命题 6.5 (科斯特利金第二卷第 56 页习题 8), 存在  $\mathbf{v} \in V$  使得  $\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{v}} = \mu_{\mathcal{A}}$ . 由命题 9.2 (iii),  $\dim (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}) = d$ . 又因为不存在向量  $\mathbf{w}$  使得  $\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{w}}$  的次数大于  $d$ , 所以不存在维数大于  $d$  的  $\mathcal{A}$ -循环子空间.  $\square$

**定理 9.5** (循环子空间分解) 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 则存在

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$$

使得

$$V = (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}_1) \oplus \cdots \oplus (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}_\ell).$$

**证明.** 设  $n = \dim(V)$ . 我们对  $n$  归纳. 当  $n = 1$  时,  $V$  是  $\mathcal{A}$ -循环的. 结论成立. 设  $n > 1$  且结论对维数小于  $n$  的任何线性空间成立.

考虑  $n$  维情形. 如果  $V$  是  $\mathcal{A}$ -循环的, 取  $\ell = 1$  即可. 否则, 存在  $\mathbf{w} \in V$  使得  $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$  在所有  $\mathcal{A}$  循环子空间中维数最大. 设该维数等于  $m$ . 则  $0 < m < n$ . 我们将构造一个  $\mathcal{A}$ -子空间  $W$  使得  $V = (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \oplus W$ . 然后把归纳假设用到  $W$  上即可.

把  $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$  的基底  $\mathbf{w}, \mathcal{A}(\mathbf{w}), \dots, \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})$  扩充为  $V$  的一组基  $\mathbf{w}, \mathcal{A}(\mathbf{w}), \dots, \mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w}), \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}), \epsilon_{m+1}, \dots, \epsilon_n$ . 由线性映射基本定理 II, 存在唯一的线性函数  $f \in V^*$  满足

$$f(\mathcal{A}^i(\mathbf{w})) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-2,$$

和

$$f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})) = 1, \quad f(\epsilon_j) = 0, \quad j = m+1, \dots, n.$$

设  $f_k = f \circ \mathcal{A}^k, k = 0, 1, \dots, m-1$ , 且

$$W = \bigcap_{k=0}^{m-1} \ker(f_k).$$

我们来验证以下两个断言:

(i)  $V = (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \oplus W = \{\mathbf{0}\};$

(ii)  $W$  是  $\mathcal{A}$ -不变的.

验证断言 (i). 设  $\mathbf{x} \in (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \cap W$  且  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . 则存在  $p \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ,  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in F$ ,  $\alpha_p \neq 0$ , 使得

$$\mathbf{x} = \alpha_0 \mathbf{w} + \alpha_1 \mathcal{A}(\mathbf{w}) + \dots + \alpha_p \mathcal{A}^p(\mathbf{w}).$$

则

$$\begin{aligned} 0 &= f_{m-1-p}(\mathbf{x}) \\ &= \alpha_0 f_{m-1-p}(\mathbf{w}) + \dots + \alpha_{p-1} f_{m-1-p}(\mathcal{A}^{p-1}(\mathbf{w})) + \alpha_p f_{m-1-p}(\mathcal{A}^p(\mathbf{w})) \\ &\quad (f_{m-1-p} \text{ 线性}) \\ &= \alpha_0 f(\mathcal{A}^{m-1-p}(\mathbf{w})) + \dots + \alpha_{p-1} f(\mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w})) + \alpha_p f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})) \\ &\quad (f_0, \dots, f_p \text{ 和 } \mathbf{w} \text{ 的定义}) \\ &= \alpha_p. \end{aligned}$$

矛盾. 故  $(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) \cap W = \{\mathbf{0}\}$ . 再根据  $W$  的定义和上学期第二章第二讲例 2.17,  $\dim(W) \geq n - m$ . 故

$$\dim(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w} + W) = \dim(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}) + \dim(W) \geq m + n - m = n.$$

于是, 断言 (i) 成立.

验证断言 (ii). 设  $\mathbf{x} \in W$ . 则对任意  $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ,

$$f_k(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A}^k(\mathbf{x})) = 0.$$

设  $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ . 则对任意  $k \in \{0, 1, \dots, m-2\}$ ,

$$f_k(\mathbf{y}) = f_k(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = f_{k+1}(\mathbf{x}) = 0.$$

还需要验证  $f_{m-1}(\mathbf{y}) = 0$ . 由  $m$  的极大性可知,

$$\dim(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{x}) \leq m.$$

根据第二章第四讲命题 9.2 (iii), 存在  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1} \in F$ , 使得

$$\mathcal{A}^m(\mathbf{x}) = \beta_0 \mathbf{x} + \beta_1 \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \dots + \beta_{m-1} \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x}).$$

于是

$$\begin{aligned} f_{m-1}(\mathbf{y}) &= f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{y})) \quad (f_{m-1} \text{ 的定义}) \\ &= f(\mathcal{A}^m(\mathbf{x})) \quad (\mathbf{y} \text{ 的定义}) \\ &= f(\beta_0 \mathbf{x} + \beta_1 \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \dots + \beta_{m-1} \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x})) \quad (\text{见上式}) \\ &= \beta_0 f(\mathbf{x}) + \beta_1 f(\mathcal{A}(\mathbf{x})) + \dots + \beta_{m-1} f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x})) \quad (f \text{ 线性}) \\ &= \beta_0 f_0(\mathbf{x}) + \beta_1 f_1(\mathbf{x}) + \dots + \beta_{m-1} f_{m-1}(\mathbf{x}) \\ &\quad (f_0, f_1, \dots, f_{m-1} \text{ 的定义}) \\ &= 0 \quad (\mathbf{x} \in W). \end{aligned}$$

于是  $\mathbf{y} \in W$ . 断言 (ii) 成立. 把归纳假设用于  $W, \mathcal{A}_W$ , 定理得证.  $\square$

**定义 9.6** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\mathbf{v} \in V$ . 如果  $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ , 则称  $\mathcal{A}$  是  $V$  上的循环算子,  $\mathbf{v}$  是  $V$  中的循环向量,  $V$  是关于  $\mathcal{A}$  和  $\mathbf{v}$  的循环空间. 简称  $\mathcal{A}$ -循环空间.

**例 9.7** 考虑导数算子  $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[x]^{(n)})$ . 则

$$\mathcal{D}^i(x^{n-1}) = \alpha_i x^{n-i-1}, \quad \text{其中 } \alpha_i \in (F \setminus \{0\}), i = 0, 1, \dots, n-1.$$

于是,

$$x^{n-1}, \mathcal{D}(x^{n-1}), \dots, \mathcal{D}^{n-1}(x^{n-1})$$

是  $\mathbb{R}[x]^{(n)}$  的一组基. 由此得出  $\mathbb{R}[x]^{(n)}$  是关于  $\mathcal{D}$ -循环空间.

**定理 9.8** 设  $\dim(V) = n$ ,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 则  $V$  是  $\mathcal{A}$ -循环的当且仅当  $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$ .

**证明.** 设  $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ . 则,  $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$  是  $V$  的一组基. 则存在  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1} \in F$  使得

$$\mathcal{A}^n(\mathbf{v}) = -f_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v}) - \dots - f_1\mathcal{A}(\mathbf{v}) - f_0\mathbf{v}.$$

令  $f(t) = t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \dots + f_1t + f_0 \in F[t]$ . 则  $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ .

断言.  $\mu_{\mathcal{A}}(t) = f(t)$ .

断言的证明. 设  $\mathbf{x}$  是  $V$  中任何向量. 存在  $p \in F[t]$  使得  $\mathbf{x} = p(\mathcal{A})(\mathbf{v})$  (命题 9.2 (i)). 则

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = p(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = p(\mathcal{A})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

由  $\mathbf{x}$  的任意性可知,  $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ . 于是,  $\mu_{\mathcal{A}} | f$  (第二章第二讲引理 4.2). 假设  $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) = d < n$ . 设

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^d + \alpha_{d-1}t^{d-1} + \dots + \alpha_0, \quad \text{其中 } \alpha_{d-1}, \dots, \alpha_0 \in F.$$

由  $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$  得出  $\mathcal{A}^d(\mathbf{v}) + \alpha_{d-1}\mathcal{A}^{d-1}(\mathbf{v}) + \cdots + \alpha_0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . 但这与  $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$  是  $V$  的一组基相矛盾. 故  $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) \geq n$ . 由此和  $\mu_{\mathcal{A}}|f$  可推出  $\mu_{\mathcal{A}} = f$ . 断言成立.

我们来计算  $\mathcal{A}$  在基底  $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$  下的矩阵

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{A}(\mathbf{v}), \mathcal{A}^2(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^n(\mathbf{v})) \\
 &= (\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -f_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -f_{n-1} \end{pmatrix}}_A.
 \end{aligned}$$

直接计算得  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t) = f(t)$  (见注记 9.9. 故  $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$ .

反之, 因为  $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$ , 所以  $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) = n$ . 由科斯特利金第二卷第 56 页习题 9 (ii), 存在  $\mathbf{v} \in V$  使得  $\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{v}} = \mu_{\mathcal{A}}$ . 由此得出,  $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$  是  $V$  的一组基. 故  $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ .

□



注解 9.9 以下是计算  $\chi_A(t)$  的过程:

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & f_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & f_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t & f_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t + f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

我们用数学归纳法来证明

$$\chi_A(t) = t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \cdots + f_1t + f_0.$$

当  $n = 1$  时,  $\chi_A(t) = t + f_0$ . 结论成立. 设  $n > 1$  且结论对  $n - 1$  成立. 把上述行列式按第一行展开得

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= t \det \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & f_1 \\ -1 & t & \cdots & 0 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & f_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t + f_{n-1} \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{n-1} f_0 \det \begin{pmatrix} -1 & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & t & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由归纳假设可知

$$\chi_A(t) = t(t^{n-1} + f_{n-1}t^{n-2} + \cdots + f_1) + f_0 = f(t). \quad \square$$

由这一结论可知, 任何一个首一且次数为正的多项式都是某个矩阵的特征多项式.

**定理 9.10** (*Hamilton-Cayley 定理的加强版*) 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 则

(i)  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ , 即  $\mu_{\mathcal{A}}(t) | \chi_{\mathcal{A}}(t)$ ;

(ii)  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  在  $F[t]$  中的不可约因子都是  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  的因子.

**证明.** 由循环子空间分解定理,

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell,$$

其中  $U_1, \dots, U_\ell$  是非零的  $\mathcal{A}$ -循环子空间. 特别地,  $U_1, \dots, U_\ell$  是  $\mathcal{A}$ -不变的(第二章第四讲命题 9.2 (ii)). 令

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{U_i}, \quad \mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}, \quad \chi_i = \chi_{\mathcal{A}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, \ell.$$

根据第二章第三讲定理 5.9,  $\mathcal{A}$  在  $V$  的某组基下的矩阵是:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_\ell \end{pmatrix}.$$

且

$$\mu_{\mathcal{A}} = \text{lcm}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell).$$

由第二章第三讲例 7.14,

$$\chi_{\mathcal{A}} = \chi_1 \chi_2 \cdots \chi_\ell.$$

由定理 9.8,  $\mu_i = \chi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell$ . 故上式可以写为:

$$\chi_{\mathcal{A}} = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_\ell.$$

于是,  $\mu_{\mathcal{A}}(t) | \chi_{\mathcal{A}}(t)$ . (i) 成立. 设  $p$  是  $\chi_{\mathcal{A}}$  的一个不可约因子. 则  $p$  整除某个  $\mu_i$  (见上学期第五章第二讲引理 3.4). 由此可知,  $p | \mu_{\mathcal{A}}$   $\square$

**注解 9.11** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$  是  $\mu_{\mathcal{A}}$  在  $F[t]$  中的不可约分解. 则  $\chi_{\mathcal{A}}$  在  $F[t]$  中的不可约分解是

$$\chi_{\mathcal{A}} = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s},$$

其中  $m_1 \leq n_1, \dots, m_s \leq n_s$  且  $n_1 \deg(p_1) + \cdots + n_s \deg(p_s) = n$ .

**推论 9.12** 设  $A \in M_n(F)$ . 则

(i)  $\mu_A(t) | \chi_A(t)$ ;

(ii)  $\chi_A(t)$  在  $F[t]$  中的不可约因子都是  $\mu_A(t)$  的因子.

例 9.13 利用上述定理, 我们有以下结论.

(i) 对合算子在某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & -E_\ell \end{pmatrix}.$$

(ii) 幂零算子的特征根都等于零, 但非零的幂零算子不可能对角化.

例 9.14 设

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}.$$

计算  $A^{66}$ .

解. 计算得  $\chi_A(t) = t^2 + t$ . 由 *Hamilton-Cayley* 定理,  $A^2 = -A$ . 于是,

$$\begin{aligned} A^{66} &= (A^2)^{33} = -A^{33} = -AA^{32} = -AA^{16} \\ &= -AA^8 = -AA^4 = -AA^2 = (-A)(-A) = A^2 = -A. \end{aligned}$$

我们得到

$$A^{66} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}. \quad \square$$

另解. 由对角化可知,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP,$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}A^{66}P \implies A^{66} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}. \quad \square$$

**引理 9.15** (不可分子空间判定准则) 设  $A \in \mathcal{L}(V)$ ,  $U$  是  $A$ -子空间. 则  $U$  是  $A$ -不可分的当且仅当下述两个条件都成立.

(i)  $U$  是  $A$ -循环子空间;

(ii)  $\mu_{A_U}$  是  $F[t]$  中某个不可约多项式的幂次.

**证明.** 设  $U$  是  $A$ -不可分子空间. 则  $U$  是  $A$ -子空间. 根据定理 9.5,  $U$  是若干  $A_U$ -循环子空间的直和, 也是若干  $A$ -循环子空间的直和. 因为  $U$  是  $A$ -不可分子空间, 所以直和项只有一个, 即  $U$  是  $A$ -循环的. 进而,  $\mu_{A_U}$  是  $F[t]$  中某个不可约多项式的幂次. 否则, 由补充材料中推论 1.2 或核核分解定理可知,  $U$  关于  $A_U$  的核核分解的直和项不止一个, 与  $U$  是  $A$ -不可分子空间矛盾.

反之, 设条件 (i) 和 (ii) 满足. 设  $\mu_{A_U} = p^m$ , 其中  $p \in F[t]$  不可约,  $m > 0$ . 因为  $U$  是  $A$ -循环子空间, 所以  $U$  是

$\mathcal{A}_U$ -循环空间. 由第二章第四讲引理 9.5,

$$\dim(U) = m \deg(p).$$

假设  $U = U_1 \oplus U_2$ , 其中  $U_1, U_2$  是正维数的  $\mathcal{A}$ -子空间. 则它们也是  $\mathcal{A}_U$ -子空间. 则  $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}} | p^m$  且  $\mu_{\mathcal{A}_{U_2}} | p^m$  (第二章第二讲引理 4.2). 但

$$p^m = \text{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}, \mu_{\mathcal{A}_{U_2}})$$

(第二章第三讲引理 5.7). 于是,  $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}, \mu_{\mathcal{A}_{U_2}}$  至少有一个等于  $p^m$ . 不妨设  $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}} = p^m$ , 根据 Hamilton-Cayley 定理,  $\chi_{\mathcal{A}_{U_1}}$  有因子  $p^k$ , 其中  $k \geq m$ . 于是,

$$\dim(U_1) \geq m \deg(p) = \dim(U).$$

矛盾.  $\square$

**定理 9.16** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 则存在  $\mathcal{A}$ -不可分子空间  $W_1, \dots, W_k$  使得

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

且  $W_i$  是  $\mathcal{A}$ -循环的,  $\mu_{\mathcal{A}_{W_i}}$  是  $F[t]$  中某个不可约多项式的幂次,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

证明. 结合引理 10.6 和第二章第三讲命题 6.2 即可.  $\square$

**例 9.17** 设  $\mathcal{D}$  是  $R[x]^{(n)}$  上的导数算子. 则  $\mu_{\mathcal{D}} = t^n$  且  $\mathbb{R}[x]^{(n)}$  是  $\mathcal{D}$ -循环的 (第二章第四讲定理 9.11). 于是,  $\mathbb{R}[x]^{(n)}$  是  $\mathcal{D}$ -不可分的.  $\square$

## 10 $\mathbb{C}$ 上的 Jordan 标准型 (存在性)

记号: 在本节中  $V$  是  $\mathbb{C}$  上的  $n$  维线性空间.

**引理 10.1** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 则  $V$  是  $\mathcal{A}$ -不可分的当且仅当存在  $\lambda \in \mathbb{C}$  使得  $\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda)^n$ . 此时,  $\mathcal{A}$  在  $V$  的某组基下的矩阵是

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (1)$$

**证明.** 设  $\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda)^n$ . 则  $V$  是  $\mathcal{A}$ -循环的 (上一讲定理 9.11, 即循环空间判别法). 由不可分子空间判别法(上一讲引理 9.13) 可知,  $V$  是  $\mathcal{A}$ -不可分的. 反之, 设  $V$  是  $\mathcal{A}$ -不可分的. 同样的引理蕴含  $\mu_{\mathcal{A}}$  是  $\mathbb{C}[t]$  中某个首一的不可约多项式的幂次. 由代数学基本定理,  $\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda)^m$ , 其中  $\lambda \in \mathbb{C}$  且  $m \in \mathbb{Z}^+$ . 该引理还蕴含  $V$  是  $\mathcal{A}$ -循环的. 于是  $m=n$  (第二章第四讲定理 9.11).

设  $V$  是  $\mathcal{A}$ -不可分的,  $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$  且  $\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda)^n$ .

**断言.** 令  $\epsilon_j = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{n-j}(\mathbf{v})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , 是  $V$  的一组基.

断言的证明. 只要证明  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  线性无关即可.

设  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  使得  $\alpha_1\epsilon_1 + \dots + \alpha_n\epsilon_n = \mathbf{0}$ . 则

$$\alpha_1(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-1}(\mathbf{v}) + \dots + \alpha_{n-1}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{v}) + \alpha_n\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

令  $f(t) = \alpha_1(t-\lambda)^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}(t-\lambda) + \alpha_n$ . 则  $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ .

设  $\mathbf{x} \in V$ . 则存在  $g(t) \in \mathbb{C}[t]$  使得  $\mathbf{x} = g(\mathcal{A})(\mathbf{v})$  (第二章第四讲命题 9.2 (i)). 于是,

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = g(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = g(\mathcal{A})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

由  $\mathbf{x}$  的任意性可知,  $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ . 因为  $\deg(f) < n$ , 所以  $f(t) = 0$ . 通过分析  $f$  的次数, 我们得到

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

断言成立.

下面我们计算  $\mathcal{A}$  在  $V$  的基底  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  下的矩阵. 设  $j = 2, \dots, n$ . 则

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\epsilon_j) &= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} + \lambda\mathcal{E})(\epsilon_j) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-j}(\mathbf{v})) + \lambda\mathcal{E}(\epsilon_j) \\ &= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-j+1}(\mathbf{v}) + \lambda\epsilon_j = \epsilon_{j-1} + \lambda\epsilon_j. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\epsilon_1) &= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} + \lambda\mathcal{E})(\epsilon_1) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-1}(\mathbf{v})) + \lambda\mathcal{E}(\epsilon_1) \\ &= (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^n(\mathbf{v}) + \lambda\epsilon_1 = \lambda\epsilon_1. \end{aligned}$$



于是

$$\mathcal{A}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad \square.$$

我们称 (1) 中的矩阵为关于  $\lambda$  的  $n$  阶 *Jordan* 块.