第十七周习题

1. 设 A 为对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求正交矩阵 P 与对角阵 D 使得 $P^tAP = D$.

2. 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{v} \in V$ 且 $||\mathbf{v}|| = 1$. 令

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x} - 2(\mathbf{v}|\mathbf{x})\mathbf{v}. \end{array}$$

证明: $\mathcal{A}$ 既是对称算子又是正交算子. 计算 $\mathcal{A}$ 的所有特征根和它们的代数重数.

3. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 半正定. 证明对任意正整数 k，存在 n 阶半正定矩阵 B 使得 $A = B^k$.

4. 设 A 是可逆的斜对称矩阵. 证明: $A + A^2$ 可逆.

5. 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ 为 A 的所有特征值, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n$ 为 B 的所有特征值. 证明：

(i) $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，定义

$$R_A(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^tA\mathbf{x}}{\mathbf{x}^t\mathbf{x}},$$

则 $\min(R_A(\mathbf{x})) = \lambda_1$ 和 $\max(R_A(\mathbf{x})) = \lambda_n$.

(ii) $A + B$ 的特征值均落在 $[\lambda_1 + \mu_1, \lambda_n + \mu_n]$ 之中.

6. 设 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 正定，其中 $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明：

$$\det(M) \leq \det(A)\det(D) - \det(A)\det(B^tA^{-1}B).$$