第十六周习题

1. 计算下列欧式空间 V 中的单位正交基.

   (i) $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$，内积 $(A \mid B) = \mathrm{tr}(A^t B)$.

   (ii) $V = \mathbb{R}[x]^{(4)}$，内积 $(f \mid g) = \int_0^1 fgdx$.

   (iii) $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle^\perp$，其中 $\mathbf{u}_1 = (1,0,1,0)^t, \mathbf{u}_2 = (1,1,1,1)^t$，内积为 $\mathbb{R}^4$ 标准内积.

2. 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧式空间, 子空间 $U \subset \mathbb{R}^4$ 是方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

   的解空间. 计算 $U^\perp$ 的一组单位正交基.

3. 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m$ 为欧氏空间 V 中 m 个单位正交向量. 证明:

   (i) 对任意 V 中向量 $\mathbf{u}$，$(\mathbf{u} \mid \mathbf{u}) \geq \sum_{i=1}^m (\mathbf{u} \mid \mathbf{e}_i)^2$.

   (ii) 进一步，若 $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_m \rangle$，则上式取等.

4. 设 U_1, U_2 为欧氏空间 V 的子空间. 证明: $(U_1 \cap U_2)^\perp = {U_1}^\perp + {U_2}^\perp$.

5. (选做) 设 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$，$\lambda$ 为 P 的复特征根. 证明：

   (i) $|\lambda| = 1$.

   (ii) 若 $\lambda \notin \mathbb{R}$， $\mathbf{u} + \mathbf{v}i$ 为 P 的属于 λ 的复特征向量 (其中 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$，$i$ 为虚数单位). 则 $\mathbf{u}^t\mathbf{u} = \mathbf{v}^t\mathbf{v}$ 且 $\mathbf{u}^t\mathbf{v} = 0$.