第十五周习题

1. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) 验证矩阵 A 和 B 有相同的特征多项式;

   (b) 求出它们的极小多项式;

   (c) 计算它们的初等因子组;

   (d) 求出它们的 Jordan 标准型.

2. 设幂零矩阵 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 满足 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ 且 $\mu_A = \mu_B$.

   (a) 证明：当 $n = 4$ 时, $A \sim_s B$.

   (b) 当 $n = 7$ 时, $A \sim_s B$ 是否成立？并说明你的结论.

3. 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. 求 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $(u + tv|v) = 0$. 再计算 $(u + tv|u)$, 并证明 Cauchy 不等式。

4. 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. 证明：

   (a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.

   (b) 如果 $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$, 则 $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \perp (\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

   (c) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$.

   (d) $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$ (θ 为 u, v 夹角).

5. 设 A, B 复矩阵，$\mathrm{diag}(A, A)$ 与 $\mathrm{diag}(B, B)$ 相似. 证明：A, B 相似。