第十四周习题

1. 设复方阵A的特征多项式
$$\chi_A = (t-1)^4(t+1)^3t^2,$$
极小多项式
$$\mu_A = (t-1)^3(t+1)^3t^2.$$
试计算 J_A.

2. 计算下列复矩阵的 Jordan 标准型.

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -2 & 14 & -8 \end{pmatrix}$,

(iii) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -4 & -10 & 4 \end{pmatrix}$,

3. 试由
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$
计算满足 $a_{n+1} = aa_n + ba_{n-1}$ 的数列的通项公式 $(a, b \in \mathbb{C})$, 结果用 a_1, a_2 表示.

4. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明: 将 A 与 A^t 看成复矩阵 Jordan 标准型相同且二者在实数域相似.

5. (选做)

(i) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 证明若 $\mathrm{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, \cdots, n$，则 A 幂零.

(ii) 设 $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 且 $AB - BA = C$. 证明若 A 与 C 可交换, 则 C 幂零.