第十三周习题

1. 设 V 是域 F 上的线性空间. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^2 = 2\mathcal{A} - \mathcal{E}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   且 $f = t^2 - 2 \in F[t]$.

   (i) 计算 $\alpha, \beta \in F$ 使得 $f(\mathcal{A}) = \alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{E}$;

   (ii) 计算 $f(B)$ 和 μ_B.

2. 设 V 是 n 维复线性空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 的特征多项式为 $f(t) = (t-\lambda)^n$, 证明下列命题等价:

   (1) V 只有有限多个 $\mathcal{A}$-子空间;

   (2) $\mathcal{A}$ 的特征子空间 V^λ 维数等于 1;

   (3) $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵是 $J_n(\lambda)$;

   (4) $\mathcal{A}$ 的最小多项式等于 $\mathcal{A}$ 的特征多项式;

   (5) V 是 $\mathcal{A}$ 的循环空间;

   (6) 对任意 $\mathcal{A}$-子空间 W, 存在多项式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 使得 $W = \ker f(\mathcal{A})$.

   提示: (5) $\Longrightarrow$ (6) 可参考

   http://www.mmrc.iss.ac.cn/~zmli/LinearAlgebra-2019-2020/LectureNotes/solutions.pdf

   第 10 题 (ii).

3. (选做) 设 V 是 n 维复线性空间, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V), \mathcal{A}$ 是循环算子，$\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$. 证明：$\mathcal{B} \in F[\mathcal{A}]$.