第十二周习题

1. 试说明下列矩阵在实数域与复数域是否可对角化.

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

(iii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

计算 A^{2024}.

3. 设 $n \leq 2$，$\mathrm{char}(F) \neq 2$，$V = F^{n\times n}$. 定义 V 上线性算子 $\phi : X \longmapsto X^t$. 求 ϕ 的特征值与特征向量并说明其是否可对角化.

4. 设 V 为复线性空间，$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，且存在 $\mathcal{A}$-子空间 $V_1, \cdots, V_m$ 使得

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m.$$

证明 $\mathcal{A}$ 可对角化当且仅当限制算子 $\mathcal{A}|_{V_i}$ 均可对角化 $(i = 1, 2, \cdots, m)$.

5. (选做) 称 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是半单的，若 $\mathcal{A}$ 的任意不变子空间存在不变的补子空间.

(i) 证明若 V 为复线性空间，半单与可对角化等价.

(ii) 若为实线性空间，是否等价?