第十一周习题

1. 求下列实矩阵的特征根：

(i) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

2. 设 A 为可逆矩阵. 证明:

(i) A 的特征值一定不为 0.

(ii) 若 λ 是 A 的特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值且对应特征向量相同.

3. 设 $f(\lambda) \in F[x]$. 证明：如果 λ_0 是线性算子 $\mathcal{A}$ 特征值, 则 $f(\lambda_0)$ 为 $f(\mathcal{A})$ 的特征值; 如果 $\mathbf{x}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 λ_0 的特征向量，则 $\mathbf{x}$ 也是 $f(\mathcal{A})$ 关于 $f(\lambda_0)$ 的特征向量.

4. 设 $\mathcal{A}$ 为 n 维线性空间 V 上的线性算子. 证明 $\mathcal{A}$ 在一组基下矩阵为 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 其中 B 可逆，C 幂零.

5. (选做) 设 $\mathcal{A}$ 为 n 维实空间上的线性算子，证明 $\mathcal{A}$ 有一维或二维的不变子空间, 进一步证明 $\mathcal{A}$ 在一组基下矩阵为准上三角矩阵且对角块均为一阶或二阶块.