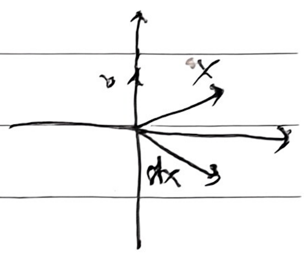
1. 上周作业

1.1 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$ $\qquad \chi_A = t^2(t-2)(t+2)$

$\Rightarrow D=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&2&\\&&&-2\end{pmatrix}$ $\quad V^0=\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ $\quad V^2=\left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ $\quad V^{-2}=\left\langle \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

$=\left\langle \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ $\quad =\left\langle \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ $\quad =\left\langle \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

$\Rightarrow A\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\\0&\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}&0\end{pmatrix}D$



1.2. $\mathcal{A}: V \longrightarrow V \qquad x \longmapsto x-2(v|x)v$

证：$\mathcal{A}$是反射

$\Rightarrow$ 取 $\langle v\rangle^\perp$ 的单位正交基 $e_1,\cdots,e_{n-1}$

得到 V 的单位正交基 $e_1,\cdots,e_{n-1}, v$

$\mathcal{A}$ 在这组基下矩阵为 $\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 特征值 1 的代数重数为 $n-1$. -1 的代数重数为 1

1.3. A 可逆斜对称 $\Rightarrow A+A^2$ 可逆

Pf: $A=P^{-1}DP \qquad D=\mathrm{diag}(N(0,\beta_1),\cdots,N(0,\beta_s))$

$\Rightarrow A^2+A=P^{-1}(D+D^2)P$

而 $D+D^2=\mathrm{diag}(N(-\beta_1^2,\beta_1),\cdots,N(-\beta_s^2,\beta_s))$

$\det N(-\beta_1^2,\beta_1)=\beta_1^4+\beta_1^2\neq 0$

$\Rightarrow D+D^2$ 可逆 $\Rightarrow A+A^2$ 可逆

1.4: A, B 对称矩阵. $\lambda_1\le\cdots\le\lambda_n$ 为A特征值 $u_1\le\cdots\le u_n$ 为 B 特征值

1) $\Rightarrow R_A(x)=\dfrac{x^tAx}{x^tx}=\dfrac{x^tO^tDOx}{x^tO^tOx}$

$\Rightarrow \min R_A(x)=\min R_D(x)=\lambda_1 \qquad \max R_A(x)=\max R_D(x)=\lambda_n$

2) $\lambda_{A+B}\in[\min R_{A+B}, \max R_{A+B}] \subseteq [\min R_A+\min R_B, \max R_A+\max R_B]$

$=[\lambda_1+u_1, \lambda_n+u_n]$

No.
Date

1.5. $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 正定

证明 $\det M \le \det A \det D - \det A \det B^t A^{-1} B$

pf: $M \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-B^tA^{-1}B \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det M = \det A \cdot \det(D-B^tA^{-1}B)$

claim: $A-B$ 正定 $\Rightarrow \det(A-B) \le \det A - \det B$

pf: ~~$\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $O^t(A-B)O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$~~

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^tAP = I_n \Rightarrow P^t(A-B)P = I_n - P^tBP$

$\exists O \in O_n(\mathbb{R})$ s.t. $O^tP^tBPO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow O^tP^t(A-B)PO = I_n - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(A-B) = \prod_{i=1}^n (1-\lambda_i)(\det P)^2 \le (1-\prod \lambda_i)(\det P)^2$

$= \det A - \det B$

Rmk: $\prod_{i=1}^n (1-\lambda_i) \le 1-\prod \lambda_i = \prod_{i=1}^n (1-\lambda_i+\lambda_i) - \prod_{i=1}^n \lambda_i$

B, $A-B$ 正定 $\Rightarrow 0<\lambda_i<1$

2. 期末复习

2.1 计算

例 设 $\chi_A=(t-1)^4 t$ $\operatorname{rank}(A-E)=3$. $\operatorname{rank}(A-E)^2=1$ 计算 J_A

pf: J_A 只可能是 $\begin{pmatrix} 0 & \\ & J_4(1) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & J_3(1) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_2(1) & \\ & & J_2(1) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & J_2(1) & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

✓

或 $\operatorname{rank}(A-E)=3 \Rightarrow \dim V_1' = 5-3=2 \Rightarrow$ 有2个 Jordan 块 关于特征值 1.

$3-1=2$ = 阶大于等于 2 的 Jordan 块的个数

$\Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_2(1) & \\ & & J_2(1) \end{pmatrix}$

例. 计算 $A=J_5(0)^2$ 的 Jordan 标准型

解: $J_5^2(0)=\begin{pmatrix}0&0&1&&\\&0&0&1&\\&&0&0&1\\&&&0&0\\&&&&0\end{pmatrix}$ $\quad\chi_A=t^5 \quad u_A=t^3$

$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}J_3(0)&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}J_3(0)&&\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}$

$\operatorname{rank}A=3 \quad\Rightarrow\quad J_A=\operatorname{diag}(J_3(0),J_2(0))$

例: 计算实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1&-1\\-1&0&-1&1\\1&-1&0&-1\\-1&1&-1&0\end{pmatrix}$ 的 P. D. s.t. $P^tAP=D$

解: $\chi_A=(t-3)(t+1)^3$

$V^{-1}=\ker(A+E)=\ker\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}=\langle(1,-1,1,-1)\rangle^\perp$

$=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$

$=\left\langle\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\1/\sqrt2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt2\\1/\sqrt2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac12\\1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}\right\rangle$

$V^3=\left\langle\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}\right\rangle$

$\Rightarrow\quad P=\begin{pmatrix}1/\sqrt2&0&-1/2&1/2\\1/\sqrt2&0&1/2&-1/2\\0&1/\sqrt2&1/2&1/2\\0&1/\sqrt2&-1/2&-1/2\end{pmatrix}$ $\qquad P^tAP=\operatorname{diag}(-1,-1,-1,3)$

2.2 理论

A. • 复方阵相似于 $\operatorname{diag}(\cdots,J_{n_i}(\lambda_i),\cdots)$

• 正规方阵正交相似于 $\operatorname{diag}(\cdots,N(\alpha_i,\beta_i),\cdots,0\cdots0)$

B. 定理的证明核心:

• $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s$ $\quad V_i$ 为不可分 A-不变子空间 $\Leftrightarrow$ V_i 循环子空间, 且 $u_{A|V_i}=f^{n_i}$ f不可约 $=(t-\lambda_i)^{n_i}$ 复数域时

(循环 $\Leftrightarrow u_A=\chi_A$;

• A正规 $\Rightarrow$ A不变子空间的正交补也为不变子空间

2.3 一些定义: 特征值, 特征多项式, 极小多项式, 不变子空间, 循环子空间.

No.
Date

· 正交矩阵, 正定矩阵, 内积, 正交, 正交补.

2-3. 证明技术

· 涉及到一个矩阵 ∴ 相似成对角阵或 Jordan 块

· 涉及到 2个矩阵 · 同时对角化 (先合成一个成单位阵, 再正交相似另一个)

· 打洞

· 归纳

例 A, B 正定, $A-B$ 正定 $\Rightarrow B^{-1}-A^{-1}$ 正定

证: 存 P 可逆 s.t. $P^TAP=I_n$ $P^TBP=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ $\lambda_i>0$

$A-B$ 正定 $\Rightarrow 1-\lambda_i>0$

$B^{-1}-A^{-1} = P\,diag(\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_n})P^T - PP^T$

$= P\,diag(\frac{1}{\lambda_1}-1,\cdots,\frac{1}{\lambda_n}-1)P^T$

>0 $(\frac{1}{\lambda_i}-1>0)$