日期:　　　/

上周作业

1. $\chi_A = t^4 - 4t^2 = t^2(t+2)(t-2)$ 　 $\lambda_1 = 0$ 　 $\lambda_2 = 2$ 　 $\lambda_3 = -2$

$AX=0 \Rightarrow V^0 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ 单位正交基为 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$(A-2E)X=0 \Rightarrow V^2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$ 单位化 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$(A+2E)X=0 \Rightarrow V^{-2} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ 单位化 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$

取 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ 　则 $P^tAP = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$

2. $\forall x, y \in V$, $(x|Ay) = (x|y - 2(v|y)v)$

$= (x|y) - 2(v|y)(x|v)$

$= (x|y) - 2(v|x)(v|y)$

$= (x - 2(v|x)v|y)$

$= (Ax|y)$

$(Ax|Ax)$

$= (x-2(v|x)v|x-2(v|x)v)$

$= (x|x) + 4(v|x)^2(v|v) - 4(v|x)(v|x)$

$= (x|x) + 4(v|x)^2 - 4(v|x)^2$

$= (x|x)$

故 A 对称正交

$Av = v - 2(v|v)v = -v$

$\forall \alpha \in \langle v \rangle^\perp$ 　 $Av = \alpha - 2(\alpha|v)v = \alpha$

故特征值 -1 重数至少为 1，1 重数至少为 $n-1$

$\Rightarrow$ 特征值 -1 重数为 1，1 重数为 $n-1$

注：也可将 v 扩充为 V 的一组单位正交基，讨论在该基下矩阵
实际上该算子即为反射算子，其在单位正交基下矩阵为Householder阵

3、由 A 半正定知 $\exists P\in O_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^tAP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

λ_i 为 A 的特征值，故 $\lambda_i\geq 0$

取 $B_1=\mathrm{diag}(\sqrt[k]{\lambda_1},\cdots,\sqrt[k]{\lambda_n})$

则 $B_1^k=P^tAP\Rightarrow PB_1^kP^t=A\Rightarrow(PB_1P^t)^k=A$

取 $B=PBP^t$ 则 $A=B^k$

实际上存在唯一，唯一性见上次习题课

类似方法另一例：

$A\in U_n(\mathbb{C})$ 对称，证明 $\exists Q\in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $A=\overline{Q}Q^{-1}$

对 n 归纳，$n=1$ 时 $A=e^{i\theta}=\overline{e^{\frac{\theta}{2}i}}\cdot(e^{-\frac{\theta}{2}i})^{-1}$

设 $n\leq m$ 时成立，$n=m+1$ 时，由 A 为酉矩阵正规

$\exists U\in U_n(\mathbb{C})$ s.t. $A=U^*\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sE_s\end{pmatrix}U$ $(|\lambda_i|=1\quad\lambda_i\neq\lambda_j)$

A 对称 $\Rightarrow U^t\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sE_s\end{pmatrix}\overline{U}=U^*\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sE_s\end{pmatrix}U$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sE_s\end{pmatrix}\overline{U}U^{-1}=\overline{U}U^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sE_s\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\overline{U}U^{-1}$ 有相同分块 $\begin{pmatrix}X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_s\end{pmatrix}$

$$\overline{U}AU^{-1}=\overline{U}U^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sE_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_sX_s\end{pmatrix}$$

日期:　　/

由 $\bar{U}^t=U^{-1}$ 知 $\bar{U}AU^{-1}$ 对称酉矩阵 $\Rightarrow \lambda_i X_i$ 为对称酉矩阵

① 若 $s=1$，则 A 为数量阵 $\Rightarrow$ 显然

② 若 $s>1$，则 $\lambda_i X_i$ 阶数小于 $n \Rightarrow \exists Q_i$ 可逆 s.t. $\lambda_i X_i=\bar{Q}_i Q_i^{-1}$

记 $Q_0=\begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_s \end{pmatrix}$ 则 $\bar{U}AU^{-1}=\bar{Q}_0 Q_0^{-1}$

$$A=\overline{U^{-1}Q_0}(U^{-1}Q_0)^{-1}$$

取 $Q=U^{-1}Q_0$ 则 $A=\bar{Q}Q^{-1}$

4、法一：由 A 反对称知 $\det(E+A)\geq 1>0 \Rightarrow E+A$ 可逆

又 A 可逆 $\Rightarrow A^2+A=A(A+E)$ 可逆

法二：由 A 可逆反对称知 A 的复特征根均为纯虚数.

则 A^2+A 的特征根均为 $(ki)^2+ki=-k^2+ki\neq 0$ (其中 ki 为 A 的特征根之一)

从而 A^2+A 可逆

5、(1) $\exists P\in O_n(\mathbb{R})$ s.t. $A=P^t\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P$

$$\max_{X\in\mathbb{R}^n\text{非0}} R_A(X)=\max_{X\in\mathbb{R}^n\text{非0}}\frac{X^tP^t\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}PX}{X^tX}=\max_{PX\in\mathbb{R}^n\text{非0}}\frac{(PX)^t\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}PX}{(PX)^t(PX)}$$

$$=\max_{Y\in\mathbb{R}^n\text{非0}}\frac{\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2}{y_1^2+\cdots+y_n^2}$$

$$\leq\max_{Y\in\mathbb{R}^n\text{非0}}\frac{\lambda_ny_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2}{y_1^2+\cdots+y_n^2}$$

$$=\lambda_n$$

且 $Y=e_n$ 时取到 λ_n，故 $\max\limits_{X\in\mathbb{R}^n} R_A(X)=\lambda_n$

同理 $\min R_A(X)=\lambda_1$

日期:　　　/

注：$R_A(\vec{x})$称为A的Rayleigh商，对特征值估计有很大用处

例：设$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$ 证明$\lambda_{min}\leq -1$　$\lambda_{max}\geq 1$　$(n>1)$

证明：取$\vec{x_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2}$　$R_A(\vec{x_1})=1\Rightarrow \lambda_{max}\geq 1$

$\vec{x_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2}$　$R_A(\vec{x_2})=-1\Rightarrow \lambda_{min}\leq -1$

(ii)
法一 $R_{A+B}(X)=\frac{X^t(A+B)X}{X^tX}=\frac{X^tAX}{X^tX}+\frac{X^tBX}{X^tX}=R_A(X)+R_B(X)$

故$\max R_{A+B}(X)\leq \max R_A(X)+\max R_B(X)=\lambda_n+\mu_n$

$\min R_{A+B}(X)\geq \min R_A(X)+\min R_B(X)=\lambda_1+\mu_1$

故A+B特征值在$[\lambda_1+\mu_1,\lambda_n+\mu_n]$中

法二：$A-\lambda_1E$半正定，$B-\mu_1$半正定

$\Rightarrow A-\lambda_1E+B-\mu_1E=(A+B)-(\lambda_1+\mu_1)E$ 半正定

$\Rightarrow$ A+B特征值不小于$\lambda_1+\mu_1$

同理A+B特征值不大于$\lambda_n+\mu_n$

6、$\det M=\det\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & D\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-B^tA^{-1}B\end{pmatrix}=\det A\det(D-B^tA^{-1}B)$

由M正定知$A,D,D-B^tA^{-1}B$正定，从而$B^tA^{-1}B$半正定

$\Rightarrow \det(D-B^tA^{-1}B+B^tA^{-1}B)\geq \det(D-B^tA^{-1}B)+\det(B^tA^{-1}B)$

$\Rightarrow \det(D-B^tA^{-1}B)\leq \det(D)-\det(B^tA^{-1}B)$　又$\det A>0$

日期:　　/

故 $\det M=\det A\det(D-B^tA^{-1}B)$

$\leq \det A(\det D-\det(B^tA^{-1}B))$

$=\det A\det D-\det A\det B^tA^{-1}B.$

注：A, D不同阶，B不为方阵时上述命题依旧成立。

推论：$\det M\leq \det A\det D$，取A或D为一阶并重复此过程即 $\det M\leq \prod_{i=1} M\binom{i}{i}$

(Hadamard不等式的证明中一部分)

1、极化分解可推广至一般方阵.

$\forall A\in M_n(\mathbb{R})\ \exists S\in O_n(\mathbb{R})$，$T$半正定 s.t. $A=ST$

证明：AA^t半正定 $\Rightarrow \exists P\in O_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^tA^tAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0\end{pmatrix}$ $(\lambda_i>0)$

记 $\tilde{A}=AP$ 则 $\tilde{A}^t\tilde{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0\end{pmatrix}$

设 $\tilde{A}=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 则 $\alpha_i^t\alpha_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 0 & i=j>s\\ \lambda_i & i=j\leq s\end{cases}\Rightarrow \alpha_i=0\ (i>s)$

$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\alpha_1,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}\alpha_r$ 为一组单位正交向量

扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的单位正交基 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\alpha_1,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$

取 $S_1=(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\alpha_1,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n)\in O_n(\mathbb{R})$

则 $\tilde{A}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,0,\cdots,0)=S_1\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ & & & 0\end{pmatrix}$ 取 $T_1=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ & & & 0\end{pmatrix}$

$A=\tilde{A}P^t=S_1T_1P^t=S_1P^tPT_1P^t$ 取 $S=S_1P^t\in O_n(\mathbb{R})$

$T=PT_1P^t$ 半正定，则 $A=ST$

注：A不可逆时分解不唯一.

2.奇异值分解(SVD) $A\in M_n(\mathbb{R})$，$\exists S,T\in O_n(\mathbb{R})$与对角阵$D$ s.t. $A=SDT$

由极化分解 $\exists O\in O_n(\mathbb{R})$，R半正定 s.t. $A=OR$ 设R的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

$\exists P\in O_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^tRP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=D$ (λ_i称为A的奇异值)

则 $A=OR=OPDP^t=(OP)DP^t$，其中OP,P^t均为正交阵.

注：SVD可推广至一般矩阵，即$\forall A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\exists S\in O_m(\mathbb{R}),T\in O_n(\mathbb{R})$

(以$m\geq n$为例) $A=S\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \\ & 0 & \end{pmatrix}T$ (这里不证明)

2.(Schur) $tr(A^*A)\geq\sum\limits_{\lambda\in spec(A)}|\lambda|^2$ ($\forall A\in M_n(\mathbb{C})$)

设A为$\mathcal{A}$在一组单位正交基下矩阵 存在$\mathbb{C}^n$的一组基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$

s.t. $\mathcal{A}$在该基下上三角 即$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_i\rangle$为$\mathcal{A}$-子空间($i=1,2,\cdots,n$)

将$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ Schmidt正交化得到单位正交基$\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_n$

$\langle\tilde{\alpha}_1,\cdots,\tilde{\alpha}_i\rangle=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_i\rangle$为A-子空间，故$\mathcal{A}$在该基下上三角

从而$\exists$ A与上三角阵$\tilde{A}$酉等价，即$\exists U\in U_n(\mathbb{C})$

s.t. $U^*AU=\tilde{A}$ (此时$\tilde{A}$对角元即为A的特征根)

$tr(A^*A)=tr(U\tilde{A}^*U^*U\tilde{A}U^*)$

$=tr(U\tilde{A}^*\tilde{A}U^*)$

$=tr(\tilde{A}^*\tilde{A})$

日期: /

设 $\tilde{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 则 $tr(\tilde{A}^*\tilde{A})=\sum_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|^2\geq\sum_{i=1}^{n}|a_{ii}|^2=\sum_{\lambda\in spec(A)}|\lambda|^2$

最后祝大家取得好成绩!