1. 上周作业

1.1 $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\chi_A=\chi_B=(t-4)^2(t-2)$

$\Rightarrow \mu=\begin{cases}(t-4)^2(t-2) \\ (t-4)(t-2)\end{cases}$ ~~代入~~ 代入 A.B $(A-4E)(A-2E)=0$ $\quad (B-4E)(B-2E)=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 0$

$\Rightarrow \mu_A=(t-4)(t-2) \qquad \mu_B=(t-4)^2(t-2)$

$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad (t-4),\ (t-4),\ (t-2)$

$J_B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & \\ & 4 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad (t-4)^2,\ (t-2)$

1.2 $A, B\in M_n(\mathbb{C})$ 幂0, $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B$, $\mu_A=\mu_B$

(a) $n=4$ 时 $A\sim_s B$

(b) $n=7$ 时 A 不一定与B相似

证 (a) $n=4$ $\qquad \mu_A=t^4 \Rightarrow J_A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$\mu_A=t^3 \qquad J_A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$\mu_A=t^2 \qquad J_A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$\mu_A=t \qquad J_A=0$

(b) $n=7$ 时 ~~$J_A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \not\sim_s J_B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$~~

$J_A=\operatorname{diag}(J_3(0), J_3(0), 0)$

$J_B=\operatorname{diag}(J_3(0), J_2(0), J_2(0))$

$\mu_A=\mu_B=t^3 \qquad \operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B=4 \qquad$ 但不相似

1.3 求 t s.t. $(u+tv|v)=0$

计算 $(u+tv|v)$ 证明 Cauchy 不等式

Pf. $(u+tv|v) = (u|v) + t(v|v) \Rightarrow t = -\frac{(u|v)}{(v|v)}$

$\Rightarrow (u+tv|u) = (u|u) - \frac{(u|v)^2}{(v|v)} = (u+tv|u+tv) \geq 0$

$\Rightarrow (u|u)(v|v) \geq (u|v)^2$

1.4 a) $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\|u\|^2+2\|v\|^2$ 平行四边形法则

b) $\|u\|=\|v\| \Rightarrow \|u\|^2-\|v\|^2 = (u+v|u-v) = 0$ 菱形对角线垂直

c) $(u|v) = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$

d) $\|u-v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$ 余弦定理

5) $\mathrm{diag}(A,A) \sim_s \mathrm{diag}(B,B) \Rightarrow A \sim_s B$

Pf. · $\mathrm{diag}(A,A)$ 的初等因子组 $= 2\{A$的初等因子组$\}$

$\Rightarrow$ A的初等因子组 = B的初等因子组

Rmk: 勾股定理 $(u|v)=0 \Rightarrow \|u\|^2+\|v\|^2=\|u+v\|^2$

三角不等式 $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$

2. n维欧式空间两两成钝角的向量最多 $n+1$ 个.

Pf. $n=2$ 时 ✓ 由.

对 n 归纳 假设 $n-1$ 时成立. n 时

设 $x_1,\cdots,x_t$ 为两两成钝角的向量 $t>n+1$

令 $W = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid (x_1|Y)=0\}$ 与 x_1 垂直的 $n-1$ 维子空间

令 $\tilde{x}_i = x_i - \langle x_i|x_1\rangle \frac{x_1}{\|x_1\|^2}$ 为 x_i 向 W 上投影(正交投影) $i\neq 1$

claim $\langle \tilde{x}_i|\tilde{x}_j\rangle < (x_i|x_j)$

$(\tilde{x}_i|\tilde{x}_j) = (x_i - (x_i|x_1)\frac{x_1}{\|x_1\|^2} \mid x_j - (x_j|x_1)\frac{x_1}{\|x_1\|^2}) = (x_i|x_j) - (x_i|x_1)(x_j|x_1)\frac{1}{\|x_1\|^2}$

时 x_i 与 x_1 成钝角 $\Rightarrow$ $(x_i|x_1)<0$

$\Rightarrow$ $(\tilde{x}_i|\tilde{x}_j) < (x_i|x_j)$

$\Rightarrow$ $\cos\tilde{\theta}_{ij} = \frac{(\tilde{x}_i|\tilde{x}_j)}{\|\tilde{x}_i\|\|\tilde{x}_j\|} < \frac{(x_i,x_j)}{\|x_i\|\|x_j\|} = \cos\theta_{ij}$ (由 $\|\tilde{x}_i\| \le \|x_i\|$)

$\Rightarrow$ 投影之后夹角变大 仍是钝角

$\Rightarrow$ $\{\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_t\}$ 为 W 中 $t-1$ 个两两成钝角的向量

$\Rightarrow$ 矛盾 $t\le n+1$

~~最后 t 是可以取到 n+1 的 由归纳 在 W 中取 n 个可~~

~~如 取 e_1, $e_2-\varepsilon e_1$, $\cdots$, $e_n-\varepsilon e_{n+1}$, $-e_1$~~

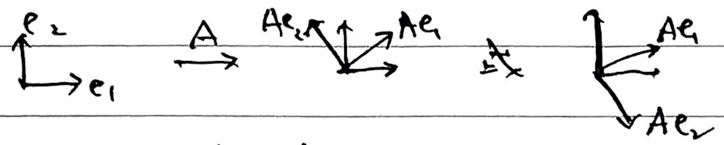
~~$(e_i-\varepsilon e_1, e_j-\varepsilon e_1) = -2\varepsilon<0$~~

~~②. 取 e_1, $e_2-\varepsilon e_1$, $e_3-\varepsilon e_1-2\varepsilon e_2$, $e_4-\varepsilon e_1-2\varepsilon e_2-3\varepsilon e_3$~~

3. $A\in O_2(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ A 是旋转 或 旋转复合反射

$A\in O_3(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ A 是绕某一条轴旋转 (或再复合反射)

Pf: $n=2$ 时



$n=3$ 时 注意到 A 有特征值 $\lambda=\pm1$

$\Rightarrow$ A 有特征向量 X

令 $W=\langle X\rangle^{\perp}$ $\Rightarrow$ $A: W\to W$ $\Rightarrow$ A 在 W 上为旋转

$\Rightarrow$ A 为绕 X 旋转