1. 上周作业

(1) V 是 n 维复向量空间, $\mathcal{A}\in \mathcal{L}(V)$ $\chi_{\mathcal{A}}(t)=(t-\lambda)^n$ 证明下列等价

(1) V 只有有限多个不变子空间

(2) 特征子空间 V^λ 维数为 1

(3) $\mathcal{A}$ 在某组基下矩阵为 $J_n(\lambda)$

(4) $\mathcal{A}$ 的极小多项式等于特征多项式

(5) V 是 $\mathcal{A}$ 的循环空间

(6) 任意 $\mathcal{A}$-子空间 W, $\exists$ 多项式 $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ s.t. $W=\ker f(\mathcal{A})$

pf: (1) ⇒ (2): 注意到特征子空间的子空间都是不变子空间

(2) ⇒ (3): $\dim V^\lambda=1$ ⇒ V 不可分 (任意不变子空间都有特征向量)

⇒ (3) (课上定理 10.1)

(3) ⇒ (4): 计算即可. $\mu_{J_n(\lambda)}=(t-\lambda)^n=\chi_{J_n(\lambda)}$

(4) ⇒ (5): 循环子空间的判别: 极小多项式 = 特征多项式

(5) ⇒ (6):

- Lemma: 循环子空间的不变子空间仍是循环子空间.

pf of Lemma: 设 V 是 $\mathcal{A}$-循环. U 是 V 的 $\mathcal{A}$-子空间

设 $V=\langle x, \mathcal{A}x,\cdots,\mathcal{A}^k x\rangle$ $U=\langle e_1,\cdots,e_s\rangle$ e_i 为 U 的基

则 $e_i=f_i(\mathcal{A})x$ $f_i\in F[x]$

令 $g=\gcd(f_1,\cdots,f_s)$ ⇒ $e_i=\frac{f_i}{g}(\mathcal{A})\cdot g(\mathcal{A})x = g_i(\mathcal{A})\cdot g(\mathcal{A})x$ $g_i\triangleq\frac{f_i}{g}$

⇒ $U=\langle e_1,\cdots,e_s\rangle = F[\mathcal{A}]g(\mathcal{A})x$

$\subseteq$ ✓, $\supseteq$: $g(\mathcal{A})x \overset{\uparrow}{=} h_1(\mathcal{A})g_1(\mathcal{A})x+\cdots+h_s(\mathcal{A})g_s(\mathcal{A})x$

Bezout 关系 $\exists h_i\in F[x]$ s.t. $g(x)=h_1(x)g_1(x)+\cdots+h_s(x)g_s(x)$

- W 为 $\mathcal{A}$-子空间 $\xRightarrow{\text{Lemma}}$ W 循环 设 $W=F[\mathcal{A}]x$

令 $f=\mu_{\mathcal{A},x}$, claim: $W=\ker\mu_{\mathcal{A},x}$

一方面: $W\subseteq\ker\mu_{\mathcal{A},x}$ ✓

另一方面: $\dim W=\deg\mu_{\mathcal{A},x} \geq \deg\mu_{\mathcal{A},Y} = \dim\ker\mu_{\mathcal{A},x}$

由 Lemma: $\ker\mu_{\mathcal{A},x}=F[\mathcal{A}]Y$

No.
Date

~~引理: Pf of Lemma:~~

~~$W \subset V$ 为 A-不变子空间~~ 取 W 的基扩充为 V 的基 $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$

~~W 循环子空间 $\iff \mu_{A|_W} = \chi_{A|_W} \iff \mu_A = \chi_A$~~

~~V 循环 $\Rightarrow \chi_A \chi_B = \mu_A \mu_B$ $\mathrm{lcm}(\mu_A, \mu_B)$~~

Rmk: 这里可以更简单一点证明引理 (用 $\dim V^\lambda = 1$ 条件)
(若 V 不循环, 则由循环子空间分解 + 复数域 $\Rightarrow \dim V^\lambda \geq 2$, 矛盾)

(6) $\Rightarrow$ (1): 注意到 对 (6) 中 f, 有 $f \mid (t-\lambda)^n$
$\Rightarrow$ 这样的 f 有有限个 (首一) $\Rightarrow$ 不变子空间有限个

Rmk: (5) $\Rightarrow$ (6) 的另一证明
令 $f = \mu_{A|_W}$ claim $W = \ker \mu_{A|_W}(A)$
pf: · $W \subset \ker \mu_{A|_W}(A)$ ✓
· 注意到 $\mu_{A|_W} \mid (t-\lambda)^n \Rightarrow$ 设 $\mu_{A|_W} = (t-\lambda)^k$
$\Rightarrow \dim W \geq k$
直接计算 $\Rightarrow \dim \ker (A - \lambda I)^k = k$
因标准型算.
$\Rightarrow W = \ker \mu_{A|_W}(A)$

1.2 $A, B \in L(V)$ A 循环算子 $AB = BA$ 证明 $B \in F[A]$
pf: 法一: 设 $V = \langle x, Ax, \cdots, A^n x \rangle$
$\Rightarrow Bx = f(A)x$
$\Rightarrow BA^i x = \cancel{A^i B(A)}\ A^i B x = f(A) A^i x$
$\Rightarrow BY = f(A) Y \quad \forall Y \in V$
$\Rightarrow B = f(A)$
法二: 见P9.

交换的都是矩阵 A. B

A 循环 ⇒ 不妨设 $A = \mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \cdots, J_{n_k}(\lambda_k))$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j$

将 B 分块 $B = (B_{ij})$ 与 A 的分块一致

$AB = BA \Rightarrow (J_{n_i}(\lambda_i) B_{ij}) = (B_{ij} J_{n_j}(\lambda_j))$

$\Rightarrow B_{ij} = 0 \quad i \neq j$ ($\cancel{\lambda_i^{n_i} \det B_{ij} = \det}$

$J_{n_i}(\lambda_i) B_{ii} = B_{ii} J_{n_i}(\lambda_i)$

⇒ ~~B_{ii} 形如~~ ~~且斜对角线上相同~~

$\cancel{= \begin{pmatrix} & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & & a_{n-1} \end{pmatrix}}$

B_{ii} 形如 $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ & b_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_2 \\ & & & b_1 \end{pmatrix} = b_1 I_n + b_2 J_{n_i}(0) + \cdots + b_n J_{n_i}^{n-1}(0)$

$\Rightarrow B_{ii} = b_1 I_n + b_2 (J_{n_i}(\lambda_i) - \lambda_i I)^1 + \cdots + b_n (J_{n_i}(\lambda_i) - \lambda_i I_{n_i})^{n-1}$

$= f_i(J_{n_i}(\lambda_i))$

中国剩余定理 ⇒ $\exists f \in F[x]$ s.t.

两两 $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ 互素 $\quad f(x) \equiv f_i(x) \mod (x - \lambda_i)^{n_i} \quad \forall i$

i.e $f(x) = f_i(x) + g_i(x)(x - \lambda_i)^{n_i}$

$\Rightarrow f(A) = \mathrm{diag}(\cdots, f(J_{n_i}(\lambda_i)), \cdots) = \mathrm{diag}(\cdots, f_i(J_{n_i}(\lambda_i)) \cdots) = B$