(遗留问题)设 $V$ 为奇数维实线性空间, $A,B\in\mathcal{L}(V)$ 且 $AB=BA$, 证明 $A$ 与 $B$ 有公共特征向量.

设 $\mu_A$ 素分解 $(t-\lambda_1)^{k_1}\cdots(t-\lambda_s)^{k_s}p_1^{l_1}\cdots p_t^{l_t}$　$p_i$ 为二次实多项式.

则 $V=\ker(A-\lambda_1\varepsilon)^{k_1}\oplus\cdots\oplus\ker(A-\lambda_s\varepsilon)^{k_s}\oplus\ker p_1^{l_1}\cdots p_t^{l_t}(A)$

由 $A|_{\ker p_1^{l_1}\cdots p_t^{l_t}(A)}$ 无特征值知 $\ker p_1^{l_1}\cdots p_t^{l_t}(A)$ 为偶数维

故 $\exists i\in[s]$ s.t. $\ker(A-\lambda_i\varepsilon)^{k_i}$ 为奇数维

且 $\forall\alpha\in\ker(A-\lambda_i\varepsilon)^{k_i}$　$(A-\lambda_i\varepsilon)^{k_i}B\alpha=B(A-\lambda_i\varepsilon)^{k_i}\alpha=0$

$\Rightarrow\ker(A-\lambda_i\varepsilon)^{k_i}$ 为 $B$-子空间

从而 $B$ 在该空间有特征值 $\lambda_0$ 与特征向量 $\beta\neq0$

由 $\beta\neq0$, $(A-\lambda_i\varepsilon)^{k_i}\beta=0$ 知 $\exists h>0$

s.t. $(A-\lambda_i\varepsilon)^h\beta\neq0$ 且 $(A-\lambda_i\varepsilon)^{h+1}\beta=0$

$\Rightarrow$　$B((A-\lambda_i\varepsilon)^h\beta)=(A-\lambda_i\varepsilon)^hB\beta=\lambda_0((A-\lambda_i\varepsilon)^h\beta)$

$A(A-\lambda_i\varepsilon)^h\beta=\lambda_i(A-\lambda_i\varepsilon)^h\beta$

故有公共特征向量

日期:　　/

第十三周作业.

1. (i) $f(\mathcal{A})=\mathcal{A}^2-2\mathcal{E}=2\mathcal{A}-3\mathcal{E}$

$\Rightarrow \alpha=2,\ \beta=-3$

(ii) $f(B)=B^2-2E=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$\chi_B=(t-1)^2 \quad \mu_B=(t-1)^2$

2. (实际上由核核分解可知对一般 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 也有这些命题)

(1) $\Rightarrow$ (2): 若 $V^\lambda$ 中有两线性无关向量 $\alpha,\beta$

则 $\forall k\in\mathbb{C}$, $\langle\alpha+k\beta\rangle$ 为 $\mathcal{A}$-子空间

与 $\mathcal{A}$-子空间有限矛盾

(2) $\Rightarrow$ (3) $\dim V^\lambda=\dim\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$ 为关于 $\lambda$ Jordan 块个数

又 $f(t)=(t-\lambda)^n$

故 $\mathcal{A}$ 只有唯一关于 $\lambda$ 的 Jordan 块

从而 $J_{\mathcal{A}}=J_n(\lambda)$

(3) $\Rightarrow$ (4) $(J_n(\lambda)-\lambda E)^k=\begin{pmatrix}0 & E_{n-k}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $(0<k<n)$

故 $0<k<n$ 时 $(t-\lambda)^k$ 不为 $J_n(0)$ 的零化多项式

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}}=\mu_{J_n(\lambda)}=(t-\lambda)^n=f(t)$

日期: /

(4)⇒(5) 定理9.8

(5)⇒(6)

由 $W$ 为 $\mathcal{A}$-子空间知 $\mathcal{A}$ 可限制在 $W$ 上

设 $\dim W=k$ 则 $\chi_{\mathcal{A}_W}=(t-\lambda)^k$

从而 $(\mathcal{A}_W-\mathcal{E}_W)^k=0$

$\Rightarrow \forall\alpha\in W,\ (\mathcal{A}-\mathcal{E})^k\alpha=0$

$\Rightarrow W\subset \ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})^k$

而 由 $\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})^{n-1}\subsetneq\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})^n$ 知

$\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})\subsetneq\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})^2\subsetneq\cdots\subsetneq\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})^{n-1}\subsetneq\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})^n$

$\Rightarrow \ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})^k=k$

从而 $W=\ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})^k$

(6)⇒(1) $W$ 为 $\mathcal{A}$ 子空间 $\Rightarrow \exists f\in\mathbb{C}[t]$ s.t. $W=\ker f(\mathcal{A})$

设 $f(t)=(t-\lambda)^k g(t)$ 其中 $\gcd(g,t-\lambda)=1$

则 $g(\mathcal{A})$ 可逆

$\Rightarrow \ker f(\mathcal{A})=\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^k g(\mathcal{A})=\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^k$

而 $k\geq n$ 时 $\ker f(\mathcal{A})=V$

故只有有限个 $\mathcal{A}$-子空间

日期: /

3、设 $V=\mathbb{F}[A]v$

由 $v,\cdots,A^{n-1}v$ 为基知 $\exists g\in\mathbb{F}[t]$

s.t. $B(v)=g(A)v \Rightarrow BA^i(v)=A^iBv=A^ig(A)v=g(A)A^iv$

故 $B=g(A)$

事实上逆命题也成立，即若 $C(A)=\mathbb{F}[A]$，则 $V$ 为循环空间，

这里 $C(A)$ 表示与 $A$ 可交换算子全体

证明：设 $\mu_A=P_1^{k_1}\cdots P_s^{k_s}$ （$P_i$ 不可约）

则 $V=\bigoplus\limits_{i=1}^{s}\ker P_i^{k_i}(A)$ 将 $\ker P_i^{k_i}(A)$ 分解为循环空间直和

若 $\exists i$ s.t. $\ker P_i^{k_i}(A)=W_1\oplus\cdots\oplus W_t$ $(t\geq 2)$

设 $\mu_{A_{W_j}}=P_i^{l_j}$ 不妨设 $l_1\leq l_2\leq\cdots\leq l_t$

则在该分解下矩阵为 $\begin{pmatrix} A_{F_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & F_t & \\ & & & B \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A_E & & \\ & 0 & \\ & & B \end{pmatrix}$ 可交换

但不存在 $f\in\mathbb{F}[t]$ s.t. $\begin{matrix} f(F_1)=E \\ f(F_i)=0 \ (i>1) \end{matrix}$

与 $C(A)=\mathbb{F}[A]$ 矛盾（也可通过Jordan标准型考虑后推广）

（空间分解为处理交换问题一大利器）

日期: /

# Jordan标准型与Taylor展开

$\forall f\in\mathbb{C}[x],\lambda\in\mathbb{C}$ $f(t)=f(\lambda)+\frac{f'(\lambda)}{1!}(t-\lambda)+\cdots+\frac{f^{(d)}(\lambda)}{d!}(t-\lambda)^d$ $(d=\deg(f))$

由f多项式知余项为0 $f(J_n(\lambda))=f(\lambda)E+\cdots+\frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}(J_n(\lambda)-\lambda E)^d$

例一：设 $g\in\mathbb{C}[x]$, $A\in M_n(\mathbb{C})$ 若 $(f(g),g')=1$, 则 $\exists B\in M_n(\mathbb{C})$

$s.t.\ g(B)=A$

设 $J_A=\mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1),\cdots,J_{n_t}(\lambda_t))$

由代数基本定理 $\exists\mu_i\in\mathbb{C}$ $s.t.\ g(\mu_i)=\lambda_i$

由 $\gcd(f(g),g')=1$ 知 $\dim\ker g(J_{n_i}(\mu_i))=1$ 故 $g(J_{n_i}(\mu_i))\sim_s J_{n_i}(\lambda_i)$

取 $B_1=\mathrm{diag}(J_{n_1}(\mu_1),\cdots,J_{n_t}(\mu_t))$

则 $g(B_1)=\mathrm{diag}(g(J_{n_1}(\mu_1)),\cdots,g(J_{n_t}(\mu_t)))$

$\sim_s\mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1),\cdots,J_{n_t}(\lambda_t))$

$\sim_s A$

即 $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$ $s.t.\ P^{-1}g(B_1)P=A$

$g(P^{-1}B_1P)=A$

开方问题：若A可逆，则A在$\mathbb{C}$可开方 (由上可得，取 $g=t^2$)

$J_n(0)$ 不可开方

证明：假设 $\exists X\in M_n(\mathbb{C})$ $s.t.\ J_n(0)=X^2$

日期: /

则 $X$ 特征根均为0 且 $\dim\ker X^2=1$

$\Rightarrow \dim\ker X \le \dim\ker X^2 = 1$

从而 $J_X = J_n(0)$ 而 $\dim\ker(J_n(0))^2 = 2 \ne \dim\ker X^2$

$\Rightarrow$ 矛盾.

平方根不一定唯一，但若 $A=B^2=C^2$

且 $B, C$ 特征根均为正实数，则 $B=C$

$B^2=C^2 \Rightarrow B(B-C) = C^2 - BC = (C-B)C = (B-C)(-C)$

由 $B$ 与 $-C$ 无公共特征值知 $B-C=0$

即 $B=C$

日期:　　　/