第十一周作业

4、法二：(见第五次习题课)

$\exists m\in\mathbb{N}_+$ s.t. $\ker(A)\subsetneq\ker A^2\subsetneq\cdots\subsetneq\ker A^m=\ker A^{m+1}=\cdots=\ker A^n=\cdots$

$\mathrm{im}(A)\supsetneq\mathrm{im}A^2\supsetneq\cdots\supsetneq\mathrm{im}A^m=\mathrm{im}A^{m+1}=\cdots=\mathrm{im}A^n=\cdots$

且此时 $V=\mathrm{im}A^m\oplus\ker A^m$.

取 $\mathrm{im}A^m$ 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\ker A^m$ 的基 $\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$

则由 $\mathrm{im}A^m,\ker A^m$ 为 A-子空间知

A 在基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 下矩阵准对角.

且 $\forall\alpha\in\ker A^m$，$A^m\alpha=0\Rightarrow(A|_{\ker A^m})^m=0$

$\forall A^m\alpha\in\ker(A|_{\mathrm{im}A^m})$ 则 $A(A^m\alpha)=0\Rightarrow\alpha\in\ker A^{m+1}=\ker A^m$

故 $A^m\alpha=0\Rightarrow\ker(A|_{\mathrm{im}A^m})=\{0\}$ 即 $A|_{\mathrm{im}A^m}$ 可逆

从而在该基下矩阵为 $\begin{pmatrix}B&\\&C\end{pmatrix}$ B 可逆 C 幂零

5、设 $\mu_A=p_1^{k_1}\cdots p_s^{k_s}$

其中 p_i 为一次或2次不可约因式

则由 $\mu_A(A)=0$ 知 $p_i(A)$ 不可能恒可逆

(事实上 $p_i(A)$ 均不可逆，否则 $p_1^{k_1}\cdots p_{i-1}^{k_{i-1}}p_{i+1}^{k_{i+1}}\cdots p_s^{k_s}$ 为 A 次数更小的零化多项式)

从而 $\exists\alpha\in V$ s.t. $p_i(A)\alpha=0$

日期: /

归纳得 $A^k\alpha$ 均可由 $\alpha, A\alpha$ 线性表出 $(\forall k\in\mathbb{N})$

从而 $\langle\alpha, A\alpha\rangle=\langle\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \cdots\rangle$ 为一维或二维不变子空间

与复相似上三角化类似可得到相似于准上三角阵.

法二: 以 V 的基为基 构造 $\mathbb{C}$-线性空间 $\tilde{V}$

$\tilde{A}: \tilde{V}\to\tilde{V}$

$\alpha+\beta i\mapsto A\alpha+A\beta i$

$\exists\lambda=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ 与 $X, Y\in V$

s.t. $\tilde{A}(X+Yi)=(a+bi)(X+Yi)\quad(X+Yi\neq 0)$

$AX+AYi=(aX-bY)+(bX+aY)i$

$\Rightarrow\begin{cases}AX=aX-bY\in\langle X,Y\rangle\\ AY=bX+aY\in\langle X,Y\rangle\end{cases}$

从而 $\langle X,Y\rangle$ 为 A-子空间且至多二维.

类似可证 $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ A与B实相似 $\Leftrightarrow$ 复相似.

"$\Rightarrow$" 显然

"$\Leftarrow$" $\exists X, Y\in M_n(\mathbb{R})$, $X+Yi\in GL_n(\mathbb{C})$

s.t. $A(X+Yi)=(X+Yi)B\Rightarrow\begin{cases}AX=XB\\ AY=YB\end{cases}$

设 $f(t)=\det(X+Yt)\in\mathbb{R}[t]$ $f(i)\neq 0\Rightarrow f\neq 0$

日期: /

从而 $\exists t' \in \mathbb{R}$ s.t. $f(t') \neq 0 \Rightarrow A(X+t'Y)=(X+t'Y)B$

故实相似

(实际上相似与域扩张无关，这里只对特征为0证明，设 $\mathbb{K}/\mathbb{F}$，

$A, B \in M_n(\mathbb{F})$，若 $\exists X \in GL_n(\mathbb{K})$ s.t. $AX=XB$

考虑 n^2 维线性方程 $AX-XB=0$

设基础解系为 $X_1, \cdots, X_r \in M_n(\mathbb{F})$

则 $\exists k_1, \cdots, k_r \in \mathbb{K}$ s.t. $\det(k_1X_1+\cdots+k_rX_r) \neq 0$

$\Rightarrow \det(t_1X_1+\cdots+t_rX_r)$ 为 r 元非0 $\mathbb{F}$ 多项式

从而 $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ s.t. $\det(\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_rX_r) \neq 0$

而 $A(\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_rX_r)=(\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_rX_r)B$

$\Rightarrow A$ 与 B $\mathbb{F}$ 相似.

Cor: 若 $A \in M_n(\mathbb{F})$ 特征根均在 $\mathbb{F}$ 中，则可相似于 Jordan 标准型

例: 求所有 $P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ $P^{-1}AP \in M_n(\mathbb{R})$

由 $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP \in M_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow P^{-1}AP = \bar{P}^{-1}A\bar{P}$

$\bar{P}P^{-1}A = A\bar{P}P^{-1}$

从而 $\bar{P}P^{-1}$ 与 E_{ij} 可交换 $\Rightarrow \bar{P}P^{-1} \in \langle E \rangle_{\mathbb{C}}$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C}$ s.t. $\bar{P}P^{-1} = cE \Rightarrow \bar{P} = cP$

日期:　　/

设 $P=X+Yi\ (X,Y\in M_n(\mathbb{R}))$ $c=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$

则 $X-Yi=(a+bi)(X+Yi)$

$$\Rightarrow\begin{cases}X=aX-bY\\-Y=aY+bX\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a-1)X-bY=0\\bX+(a+1)Y=0\end{cases}$$

从而 X 与 Y 线性相关 不妨设 $Y\neq0$, $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ s.t. $X=\lambda Y$

$P=(1+\lambda i)X$

即 P 为实可逆阵非0复常数倍.

第十二周作业

1. (i) $\chi_A(t)=(t+1)(t-1)$ 在 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 均有2不同根 故可对角化.

(ii) $\chi_A(t)=t^2+1$ 在 $\mathbb{R}$ 不可对角化, 在 $\mathbb{C}$ 可对角化.

(iii) $\chi_A(t)=t(t^2+3)$ 在 $\mathbb{R}$ 不可对角化, 在 $\mathbb{C}$ 可对角化.

2. $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}v_1=0\Rightarrow v_1\in\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}v_2=0\Rightarrow v_2\in\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$

取 $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}$

$(P^{-1}AP)^{2024}=\begin{pmatrix}0&0\\0&2^{2024}\end{pmatrix}\Rightarrow A^{2024}=P\begin{pmatrix}0&0\\0&2^{2024}\end{pmatrix}P^{-1}=2^{2023}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

也可 $t^{2024}=q(t)(t^2+2t)+r(t)\Rightarrow\begin{cases}r(0)=0\\r(-2)=(-2)^{2024}\end{cases}\Rightarrow r=(-2)^{2023}t$

从而 $A^{2024}=(-2)^{2023}A$

日期:　　/

3、$X^t=\lambda X \Rightarrow (X^t)^t=\lambda^2 X \Rightarrow \lambda^2=1$

从而$\lambda=\pm 1$　$\lambda=1$即$X=X^t \Rightarrow X\in SM_n(\mathbb{F})$

$\lambda=-1$即$X=-X^t \Rightarrow X\in SSM_n(\mathbb{F})$

由$M_n(\mathbb{F})=SM_n(\mathbb{F})\oplus SSM_n(\mathbb{F})$知可对角化.

4.法一:取$V_1,\cdots,V_m$的基并为V的基,则A在该基下矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix}$$ 其中A_i为$A|_{V_i}$在该基下矩阵

从而 $$f(A)=\begin{pmatrix} f(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(A_m) \end{pmatrix}$$

$f(A)=0 \Leftrightarrow f(A_1)=\cdots=f(A_m)=0$

故$\mu_A(t)=\mathrm{lcm}(\mu_{A_1}(t),\cdots,\mu_{A_m}(t))$

A可对角化$\Leftrightarrow \mu_A(t)$为互素一次因式之积

$\Leftrightarrow \mathrm{lcm}(\mu_{A_1}(t),\cdots,\mu_{A_m}(t))$为互素一次因式之积

$\Leftrightarrow \mu_{A_i}(t)$均为互素一次因式之积

$\Leftrightarrow A_i$均可对角化

法二:"$\Leftarrow$"略

日期:　　　/

"⇒": 设$\mathcal{A}$在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下矩阵为对角阵$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

由$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$知

$\exists!\ \alpha_i^{(1)}\in V_1,\cdots,\alpha_i^{(m)}\in V_m$

s.t. $\alpha_i=\alpha_i^{(1)}+\cdots+\alpha_i^{(m)}$

$\Rightarrow \mathcal{A}\alpha_i=\lambda_i\alpha_i=\lambda_i\alpha_i^{(1)}+\cdots+\lambda_i\alpha_i^{(m)}$

故 $\mathcal{A}\alpha_i^{(j)}=\lambda_i\alpha_i^{(j)}\quad (j=1,2,\cdots,m)$

而$\forall\beta\in V_j$, $\exists k_1,\cdots,k_n$ s.t. $\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$

$\Rightarrow \beta=k_1\alpha_1^{(j)}+\cdots+k_n\alpha_n^{(j)}$

故$\alpha_1^{(j)},\cdots,\alpha_n^{(j)}$包含$V_j$的基$\Rightarrow \mathcal{A}|_{V_j}$有特征向量构成基

从而可对角化.

5、(1) 半单 ⇒ 可对角化：

由 V 为 $\mathbb{C}$-线性空间知 $\exists \alpha_1 \in V \setminus \{0\}, \lambda_1 \in \mathbb{C}$ s.t. $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$

取 $V_1 = \langle \alpha_1 \rangle$ 由半单知存在不变的补空间 $\tilde{V}_1$

$A|_{\tilde{V}_1}$ 有特征值 λ_2 与特征向量 $\alpha_2 \in \tilde{V}_1 \setminus \{0\}$ s.t. $A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2$

取 $V_2 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$，存在不变补空间 $\tilde{V}_2$

重复此过程得到 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in V$ s.t. $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ $(i=1,\cdots,n)$

且 $\alpha_i \notin \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1} \rangle$ $(i=2,\cdots,n)$

$\Rightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为基且 A 在该基下矩阵对角

(归纳也可)

可对角化 ⇒ 半单：

$\forall V$ 的 A-子空间 U，$A|_U$ 可对角化

从而存在 U 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ s.t. $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{C})$

由 A 可对角化知存在 n 个线性无关特征向量

从而存在 $\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \cdots, \beta_n$ 均为特征向量且

$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_n$ 线性无关

$A\beta_{r+j} \in \langle \beta_{r+j} \rangle \subset \langle \beta_{r+1}, \cdots, \beta_n \rangle \Rightarrow \langle \beta_{r+1}, \cdots, \beta_n \rangle$ 为 A-子空间.

注：结合4,5题可知若 U 为 A-子空间则 A 可对角化 ⇒ $A|_U$ 可对角化

日期：　　/

(ii) 不等价. 如 $\mathcal{A}$ 在一组基下矩阵为 $\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, 无非平凡不变子空间

从而半单但不可对角化.

之前考虑过 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$, V 为 $\mathbb{C}$-线性空间, 若 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$ 则 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 在一组基下矩阵同时为上三角阵

1. 上题中若 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 可对角化, 则可同时对角化. (此时不依赖复数域)

因为 $\mathcal{A}$ 可对角化, 故 $V=V_{\mathcal{A}}^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\mathcal{A}}^{\lambda_s}$

而 $\forall\alpha\in V_{\mathcal{A}}^{\lambda_i}$, $\mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha)=\mathcal{BA}\alpha=\mathcal{B}\lambda_i\alpha=\lambda_i(\mathcal{B}\alpha)$

从而 $V_{\mathcal{A}}^{\lambda_i}$ 为 $\mathcal{B}$-子空间, 由题4知 $\mathcal{B}|_{V_{\mathcal{A}}^{\lambda_i}}$ 可对角化

即 $\exists V_{\mathcal{A}}^{\lambda_i}$ 的基使得 $\mathcal{B}|_{V_{\mathcal{A}}^{\lambda_i}}$ 对角

并为 V 的基后 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 在该基下均为对角.

Cor: $M\subset\mathcal{L}(V)$ 且 M 中元均可对角化, 则可同时对角化

(对 $\dim\langle M\rangle$ 归纳即可)