1. 上周作业

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & & \vdots \\ -1 & \cdots & & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-n & -1 & \cdots & -1 \\ \lambda-n & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda-n & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-n & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$$

2. (i) A 可逆 $\Rightarrow$ A 的特征值不为 0

(ii) 若 λ 是 A 特征值，则 λ^{-1} 是 A^{-1} 特征值

pf (i) $\varphi_A(0)=\det(-A)\neq 0 \Rightarrow 0$ 不是 A 特征值

(ii) 设 $AX=\lambda X \underset{\text{作用}A^{-1}}{\Rightarrow} X=\lambda A^{-1}X \underset{\lambda\neq 0}{\Rightarrow} A^{-1}X=\lambda^{-1}X$

$\Rightarrow X$ 是 A^{-1} 特征值为 λ^{-1} 的特征向量

3. $AX=\lambda X \Rightarrow f(A)X=f(\lambda)X$

pf: $\left.\begin{array}{l} A^2X=A\lambda X=\lambda^2X \\ A^kX=\cdots=\lambda^kX \end{array}\right\} \Rightarrow f(A)X=f(\lambda)X$

4. $A\in\mathcal{L}(V)$ 证明存在一组基 s.t. A 在其下矩阵为 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ B 可逆，C 幂 0

pf: $\varphi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)\underset{\text{in }\mathbb{R}}{=}\lambda^s(\lambda^{n-s}+a_1\lambda^{n-s-1}+\cdots+a_{n-s-1}\lambda^1+a_{n-s})$ $a_{n-s}\neq 0$

• $\underset{\text{核空间分解}}{\Rightarrow}$ $V=\ker\mathcal{A}^s\oplus\ker(\mathcal{A}^{n-s}+a_1\mathcal{A}^{n-s-1}+\cdots+a_{n-s}I)$

• claim $\mathcal{A}$ 在 $\ker\mathcal{A}^s$ 上幂 0，在 $\ker(\mathcal{A}^{n-s}+a_1\mathcal{A}^{n-s-1}+\cdots+a_{n-s}I)$ 上可逆

由 $\mathcal{A}^s=0$ in $\ker\mathcal{A}^s \Rightarrow \mathcal{A}$ 在 $\ker\mathcal{A}^s$ 上幂 0

$\mathcal{A}^{n-s}+a_1\mathcal{A}^{n-s-1}+\cdots+a_{n-s}I=0$ in $\ker(\mathcal{A}^{n-s}+a_1\mathcal{A}^{n-s-1}+\cdots+a_{n-s}I)$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-s-1}+a_1\mathcal{A}^{n-s-2}+\cdots+a_{n-s-1}I_n)=-a_{n-s}I$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ 可逆 in $\ker(\mathcal{A}^{n-s}+a_1\mathcal{A}^{n-s-1}+\cdots+a_{n-s}I)$

• 取两个 ker 的基，得到的矩阵即为所求

No.

Date

5. $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ V ℝ线性空间 ⇒ $\mathcal{A}$ 一定有1维或2维不变子空间

⇒ $\mathcal{A}$ 有矩阵表示为分块上三角矩阵，对角块为1阶或2阶

pf. 考虑 特征多项式 $\det(\lambda I-A)\in\mathbb{R}[\lambda]$

· 若有实根 ⇒ $\mathcal{A}$ 有特征向量 ⇒ $\mathcal{A}$ 有一维不变子空间

· 若无实根，考虑它的复根 $a+ib$

$\Rightarrow (a+ib)I_n-A\in M_n(\mathbb{C})$ 不可逆

$\Rightarrow \exists\, X+iY\in\mathbb{C}^n$, $X,Y\in\mathbb{R}^n$ s.t. $((a+ib)I_n-A)(X+iY)=0$

$\Rightarrow A(X+iY)=(a+ib)(X+iY)$

$\Rightarrow \begin{cases}AX=aX-bY\\ AY=bX+aY\end{cases}$ ⇒ $\langle X,Y\rangle$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间 维数为1或2.

· 注：若 $\mathcal{A}$ 有 k维不变子空间 U，则 $\mathcal{A}$ 有矩阵表示 $\begin{pmatrix}B_{kk}&0\\0&C\end{pmatrix}$

（取 U 的基再扩充成 V 的基即可）

$$\Rightarrow A\sim_s\begin{pmatrix}A_1&*\\&B_1\end{pmatrix}\underset{\uparrow\ \text{对}B_1\text{操作}}{\sim_s}\begin{pmatrix}A_1&&*\\&A_2&\\&&B_2\end{pmatrix}\sim_s\cdots\sim_s\begin{pmatrix}A_1&&&*\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix}$$

A_1 1阶或2阶

引理：$A\sim_c(b_{ij})$ 满足 $b_{ii}=0\ \forall i$

pf. 将对称矩阵看作二次型 q，我们想找二次型无平方项

1. 不妨设 $q=x_1^2+\cdots+x_s^2-x_{s+1}^2-\cdots-x_{s+t}^2$

不妨设 $s\le t$

2. 不妨设 $s=1$

否则，考虑 $q=(x_1^2-x_{s+1}^2)+\cdots+(x_{s-1}^2-x_{2s-1}^2)$

$+x_s^2-x_{2s}^2-x_{2s+1}^2-\cdots-x_{s+t}^2$

$=(x_1-x_{s+1})(x_1+x_{s+1})+\cdots+(x_{s-1}-x_{2s-1})(x_{s-1}+x_{2s-1})$

$+x_s^2-x_{2s}^2-x_{2s+1}^2-\cdots-x_{s+t}^2$

No.

Date

3. $q = x_1^2 - x_2^2 - \cdots x_{t+1}^2$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \cdots + y_{t+1} \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \vdots \\ x_{t+1} = y_{t+1} \end{cases}$$

$= (y_1 + y_2 + \cdots + y_{t+1})^2 - (y_1 + y_2)^2 - y_3^2 - \cdots - y_{t+1}^2$

$= 2y_1y_3 + 2y_1y_4 + \cdots + 2y_1y_{t+1} + \sum\limits_{2 \leq i < j \leq t+1} 2y_iy_j$

无平方项