日期: /

期中(这里只补充一些其它方法)

7.(ii) 法二: 设U的一组基为$u_1,\cdots,u_d$,扩充为V的一组基,设f在该基下矩阵为A

则$\forall u\in U$, $f(u,w)=0$

$\Leftrightarrow \forall \alpha\in\langle e_1,\cdots,e_d\rangle$, $\alpha^tA\beta=0$ (其中β为w在该基下坐标)

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e_1^t\\ \vdots\\ e_d^t\end{pmatrix}A\beta=0$ 即β在$\begin{pmatrix} e_1^t\\ \vdots\\ e_d^t\end{pmatrix}A$的解空间

而$\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} e_1^t\\ \vdots\\ e_d^t\end{pmatrix}A\right)\le \mathrm{rank}\begin{pmatrix} e_1^t\\ \vdots\\ e_d^t\end{pmatrix}=d$ 故$\dim W=\dim\left(\mathrm{sol}\left(\begin{pmatrix} e_1^t\\ \vdots\\ e_d^t\end{pmatrix}A\right)\right)\ge n-d$

8.(i) 由A半正定知$\exists P\in M_n(\mathbb{R})$ s.t. $A=P^tP$ 且A对角元均非负

若A对角线上无正元素,则$\mathrm{tr}A=0\Rightarrow \mathrm{tr}(P^tP)=0\Rightarrow P=0$

从而$A=0$与$\mathrm{rank}(A)>0$矛盾

(ii) (几何做法)

先证对任一$\mathbb{R}^n$的非平凡子空间U, $\exists X\in\mathbb{R}^n\setminus U$ s.t. $X^tAX=0$

假设不成立,则$\forall X\in\mathbb{R}^n\setminus U$, $X^tAX\neq0$,不妨设$X^tAX>0$.

由A不定知$\exists u,v\in\mathbb{R}^n$ s.t. $u^tAu>0$, $v^tAv<0$.

记$f(k)=(X+kv)^tA(X+kv)$

$=v^tAvk^2+(2X^tAv)k+X^tAX$

$f(0)=X^tAX>0$, $\lim\limits_{k\to+\infty}f(k)=\lim\limits_{k\to-\infty}f(k)<0\Rightarrow$有两零点$k_1,k_2$ ($k_1\neq k_2$)

故$X+k_1v\in U$, $X+k_2v\in U\Rightarrow X\in U$ 与$X\in\mathbb{R}^n\setminus U$矛盾.

日期:　　/

故 $\exists\, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \langle 0 \rangle$，$\varepsilon_1^t A \varepsilon_1 = 0$

$\exists\, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \langle \varepsilon_1 \rangle$，$\varepsilon_2^t A \varepsilon_2 = 0$

$\cdots$

$\exists\, \varepsilon_n \in \mathbb{R}^n \setminus \langle \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1} \rangle$，$\varepsilon_n^t A \varepsilon_n = 0$

从而 $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)^t A (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$ 对角元全为0且为合同变换.

第十一周作业

1、(i) $\sin\theta = 0$ 时有实根 $\cos\theta$（复特征根为 $\cos\theta \pm i\sin\theta$，即 $e^{\pm i\theta}$，该矩阵对应算子即为旋转）

(ii) 0

(iii) $\det\left(tE_n - \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}(1 \cdots 1)\right)$

$= t^n \det\left(E_n - \frac{1}{t}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}(1 \cdots 1)\right)$

$= t^n \det\left(1 - \frac{1}{t}(1 \cdots 1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$

$= t^n \left(1 - \frac{n}{t}\right)$

$= t^{n-1}(t-n)$ 特征根为 $0, n$.

2、(i) 若有0特征值，则 $\exists\, \alpha \neq 0$ s.t. $A\alpha = 0\alpha$ 与 A 可逆矛盾

(ii) $A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \alpha = \lambda A^{-1}\alpha \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\alpha = A^{-1}\alpha$

3、$A\alpha = \lambda_0\alpha \Rightarrow A^k\alpha = A^{k-1}(\lambda\alpha) = \cdots = \lambda^k\alpha$

日期: /

设 $f=\sum_{i=0}^{m}a_i t^i$

从而 $f(\mathcal{A})\alpha=\left(\sum_{i=0}^{m}a_i\mathcal{A}^i\right)\alpha=\sum_{i=0}^{m}a_i(\mathcal{A}^i\alpha)=\left(\sum_{i=0}^{m}a_i\lambda_0^i\right)\alpha=f(\lambda_0)\alpha$

注：也可通过代数闭域上相似上三角化得到 $f(A)$ 特征值为 $f(\lambda)$

补充：A 与 B 无相同特征根时 $AX=XB$ 只有零解

$AX=XB\Rightarrow\forall f\in\mathbb{F}[x]\quad f(A)X=Xf(B)$

取 f 为 A 的特征多项式 则 $0=Xf(B)$

设 B 的特征根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，由无相同特征根知 $f(\lambda_i)\neq0$

从而 $f(B)$ 可逆 $\Rightarrow X=0$

4、法一：设 $\mu_A=t^m g(t)$ 其中 $\gcd(t,g)=1$

则 $V=\ker\mathcal{A}^m\oplus\ker g(\mathcal{A})$

取 $\ker g(\mathcal{A})$ 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\ker\mathcal{A}^m$ 的基 $\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$ 并为 V 的基

则由 $\ker g(\mathcal{A})$，$\ker\mathcal{A}^m$ 为 $\mathcal{A}$ 子空间知 $\mathcal{A}$ 在该基下矩阵准对角.

$g(\mathcal{A}|_{\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle})=0\Rightarrow\mathcal{A}|_{\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle}$ 可逆

$(\mathcal{A}|_{\langle\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n\rangle})^m=0\Rightarrow\mathcal{A}|_{\langle\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n\rangle}$ 幂零

故在该基下矩阵为 $\begin{pmatrix}B&\\&C\end{pmatrix}$ B 可逆 C 幂零.

日期:　　/