1. 上三周作业

1.1. $\mathcal{A}(e_1,e_2,e_3)=\mathcal{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)A_{2\times3}$

$\mathcal{A}(v_1,v_2,v_3)=\mathcal{B}(w_1,w_2)B_{2\times3}$

$(v_1,v_2,v_3)=(e_1,e_2,e_3)P \quad (w_1,w_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)Q$

$\Rightarrow \mathcal{A}(v_1,v_2,v_3)=\mathcal{A}(e_1,e_2,e_3)P=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)AP=(w_1,w_2)Q^{-1}AP$

$\Rightarrow B=Q^{-1}AP$

1.2 $\mathcal{A}: M_n(F)\to M_n(F) \quad X\mapsto C^{-1}XC \quad C\in GL_n(F)$

$\operatorname{rank}\mathcal{A}=n^2$

Pf: $\operatorname{rank}\mathcal{A}=\dim M_n(F)-\dim\ker\mathcal{A}$

$=n^2-0=0$ $\quad(\ker\mathcal{A}=\{0\}:\ C^{-1}XC=0\Rightarrow X=0)$

1.3 TFAE $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ $\quad\xleftrightarrow{\text{取基}}\quad$ $A\in M_n(F)$

$\mathcal{A}\in\langle\mathcal{E}_V\rangle$ $\quad\Leftrightarrow A\in\lambda I_n$ for some $\lambda\in F$

$\Leftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}\ \ \forall\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$ $\quad\Leftrightarrow AB=BA\ \ \forall B\in M_n(F)$

$\Leftrightarrow \mathcal{A}$ 在任意基下矩阵都相同 $\quad\Leftrightarrow P^{-1}AP=A\ \ \forall P\in GL_n(F)$

1.4. $J=\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}$ 相似于 $J^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}$, $\quad \vec{v},\mathcal{A}\vec{v},\cdots,\mathcal{A}^{n-1}\vec{v}$ 线性无关

$\mathcal{A}^n v=0$

Pf: J 是 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\vec{v},\mathcal{A}\vec{v},\cdots,\mathcal{A}^{n-1}\vec{v}\}$ 下的矩阵.

J^t 是 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\mathcal{A}^{n-1}\vec{v},\cdots,\mathcal{A}\vec{v},\vec{v}\}$ 下的矩阵

1.5 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ $\quad A$ 是 $\mathcal{A}$ 在基下的矩阵. 则

(i) $f(\mathcal{A})=0 \Leftrightarrow f(A)=0$

(ii) $m_{\mathcal{A}}=m_A$

Pf: (i) 由 线性同构 $\mathcal{L}(V)\to M_n(F)$ $\quad \mathcal{A}\mapsto A$, $\quad f(\mathcal{A})\mapsto f(A)$

$\Rightarrow f(\mathcal{A})=0 \Leftrightarrow f(A)=0$

(ii) 由 (i) 显然

No.
Date

1.6. $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ $\forall V$的子空间 $\mathcal{A}$-不变 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$是数乘算子

pf: "$\Leftarrow$" ✓

"$\Rightarrow$" $\forall v\in V$ $\langle v\rangle$ $\mathcal{A}$-不变 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}v=\lambda_v v$

下证 λ_v 不依赖 v.

$\forall v,u\in V$. $\mathcal{A}(v+u)=\lambda_{v+u}(v+u)=\lambda_{v+u}v+\lambda_{v+u}u$

$\mathcal{A}v+\mathcal{A}u=\lambda_v v+\lambda_u u$

不妨设 v,u 线性无关

$\Rightarrow$ $\lambda_v=\lambda_{v+u}=\lambda_u$ $\forall v,u$ □

2. $A\in F^{m\times n}$ $B\in F^{n\times m}$ 证明 AB 与 BA 非0特征值相同

pf 法一: 设 λ 是 AB 特征值, 则 $\exists X$ s.t $ABX=\lambda X$

$\Rightarrow$ $BABX=\lambda BX$ $\Rightarrow$ 则 BX 是 BA 的特征向量, 特征值为 λ.

法二: 由特征值是 ~~det λI-A~~ 特征多项式的根

由 $\begin{pmatrix} I_n & \\ A & I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda I_n & \\ & \lambda I_m-AB\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & \\ -A & I_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda I_n-BA & \\ & \lambda I_m\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\lambda^n\det(\lambda I_m-AB)=\lambda^m\det(\lambda I_n-BA)$

$\Rightarrow$ AB 与 BA 非0特征值相同. 事实上, 非0特征值的重数都相同

3. $A,B\in M_n(\mathbb{C})$, 都可对角化, $AB=BA$ $\Rightarrow$ A,B 可同时对角化.

i.e $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$ s.t $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ 同时为对角阵

pf: • A 可对角化 $\Rightarrow$ $\exists P_1\in GL_n(\mathbb{C})$ s.t

$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t I_{n_t}\end{pmatrix}\triangleq A_1$

• 令 $B_1=P_1^{-1}BP_1$

• $A_1B_1=B_1A_1$ ($A_1B_1=P_1^{-1}AP_1P_1^{-1}BP=P_1^{-1}ABP=P_1^{-1}BAP=B_1A_1$)

$\Rightarrow$ $B_1=\begin{pmatrix}B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{tt}\end{pmatrix}$ B_{ii} 是 $n_i\times n_i$ 方阵.

No.
Date

- B_{ii} 可对角化.

B_1 可对角化 $\Leftrightarrow$ B_1 的最小多项式无重根 $\Rightarrow$ B_{ii} 的最小多项式无重根 $\Leftrightarrow$ B_{ii} 可对角化

- 显然 $\lambda_i I_{n_i}$ 可与 B_{ii} 同时对角化 : $P_i^{-1}\lambda_i I_{n_i} P_i = \lambda_i I_{n_i}$, $P_i^{-1} B_{ii} P_i = \mathrm{diag}(\cdots)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t I_{n_t} \end{pmatrix}$ 可与 $\begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{tt} \end{pmatrix}$ 同时对角化

(取 $P_2 = \begin{pmatrix} P_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & P_{tt} \end{pmatrix}$ 即可)

$\Rightarrow$ A 与 B 可同时对角化

4. $A \in M_n(\mathbb{C})$ A 可对角化 $\Leftrightarrow$ M_A 无重根

Pf "$\Rightarrow$" A 可对角化 $\Rightarrow A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix} \Rightarrow M_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_s)$

"$\Leftarrow$" M_A 无重根, 设 $M_A = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_s)$

$\Rightarrow \mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 I_n) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(A-\lambda_s I_n)$

取 $\mathrm{Ker}\,A-\lambda_i I_n$ 的基构成 $\mathbb{C}^n$ 的基 $\Rightarrow A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}$

5. 设 $A, B \in M_n(F)$ 没有公共的特征值. 证明 $\mathcal{A}: F^{n^2} \to F^{n^2}: X \to AX - XB$ 可逆

Pf: 只需证明 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = 0$

设 $\mathcal{A}X = AX - XB = 0$

$\Rightarrow AX = XB$

$\Rightarrow A^2X = AXB = XB^2 \quad \cdots \quad f(A)X = Xf(B) \quad \forall f \in F[x]$

$\Rightarrow \varphi_B(A)X = X\varphi_B(B) = 0 \qquad \varphi_B$ 为 B 的特征多项式

设 $\varphi_B(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{n_t}$

則 $\varphi_B(A) = (A-\lambda_1 I)^{n_1}\cdots(A-\lambda_t I)^{n_t}$

由 A, B 没有公共的特征值 $\Rightarrow \det(A-\lambda_i I) \neq 0$

$\Rightarrow \det \varphi_B(A) \neq 0$

$\Rightarrow \varphi_B(A)$ 可逆 $\Rightarrow X = 0$

No.
Date

6. 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$

则 对 $X\in\mathbb{R}^n$ 不是 A 的特征向量

极限 $\widetilde{X}=\lim\limits_{j\to\infty}\frac{A^jX}{\|A^jX\|}$ 存在，且是属于 λ_1 的特征向量

Pf: 由于特征值刚好有 n 个. 设 x_i 是属于 λ_i 的特征向量. 则 $\{x_i\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的基

设 $X=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$

$\Rightarrow A^jX=\alpha_1\lambda_1^jx_1+\cdots+\alpha_n\lambda_n^jx_n$

$$\Rightarrow \frac{A^jX}{\|A^jX\|}=\frac{\alpha_1\lambda_1^jx_1+\cdots+\alpha_n\lambda_n^jx_n}{\|\alpha_1\lambda_1^jx_1+\cdots+\alpha_n\lambda_n^jx_n\|}$$

$$=\frac{\alpha_1x_1+\alpha_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^jx_2+\cdots+\alpha_n(\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^nx_n}{\|\alpha_1x_1+\alpha_2(\frac{\lambda_2}{|\lambda_1|})^jx_2+\cdots+\alpha_n(\frac{\lambda_n}{|\lambda_1|})^jx_n\|}$$

$$\longrightarrow\frac{\alpha_1x_1}{\|\alpha_1x_1\|}$$

7. · V 是 F 上线性空间 $\mathcal{A}\in L(V)$　W - $\mathcal{A}$ 不变子空间，则 诱导

$\widetilde{\mathcal{A}}: V/W\to V/W$　$v+W\to\mathcal{A}v+W$

· 给定 W 的基 $e_1,\cdots,e_s$，扩充成 V 的基 $e_{s+1},\cdots,e_n$，则

$\mathcal{A}$ 在 $(e_1,\cdots,e_s,\cdots e_n)$ 下矩阵为　$\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}$

$\widetilde{\mathcal{A}}$ 在基 $e_{s+1}+W,\cdots,e_n+W$ 下的矩阵为　B

8. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$. 则 A 可相似成上三角矩阵

Pf: 对 n 归纳.

$n=1$ ✓

假设 n-1 时成立，n 时，

由 $\det(\lambda I-A)\in\mathbb{C}[\lambda]$ 一定有根，设为 λ_1

$\Rightarrow$ A 一定有属于 λ_1 的特征向量 X_1

将 X_1 扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的基. A 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\&B_{n-1}\end{pmatrix}$

对 $B_{n-1,n-1}\in M_{n-1}(\mathbb{C})$ 用归纳假设

□

No.
Date

9. 设 $\mu_A = \prod_{i=1}^{t} (\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ 证明 $B = \begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 的最小多项式为

$$\mu_B(\lambda) = \prod_{i=1}^{t} (\lambda-\lambda_i)^{m_i+1}$$

Pf 注意到 $f(B) = \begin{pmatrix} f(A) & f'(A) \\ & f(A) \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad \mu_A \mid f \quad \mu_A \mid f'$

$\Rightarrow$ 设 $f = \mu_A \cdot g$ 则 $f' = \mu_A' \cdot g + \mu_A \cdot g'$

$\Rightarrow \quad \mu_A \mid g \cdot \mu_A'$

$\Rightarrow \quad \cancel{(\mu_A, \mu_A') \mid g} \quad \frac{\mu_A}{(\mu_A, \mu_A')} \mid g$

~~进~~易得 $\frac{\mu_A}{(\mu_A, \mu_A')} = \prod_{i=1}^{t} (\lambda-\lambda_i)$

$\Rightarrow \quad \mu_B = \prod_{i=1}^{t} (\lambda-\lambda_i)^{m_i+1}$