中国科学院大学二零二二年春季线性代数期中考试答案

编号：B01GB003Y-B02　名称：线性代数II-B　教师：李子明、何适、高艺漫

姓名:　　　　　　　**学号:**

注意事项：

1.考试时间为 120 分钟，考试方式为闭卷；

2.全部答案写在答题纸上；

3.考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (15分) 设 $H := \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C} \right\}$, 其中 $\bar{u}, \bar{v}$ 分别代表 u, v 的共轭.

(i) (5分) 证明 H 是 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 的子环.

(ii) (5分) 举例说明 H 不是交换环.

(iii) (5分) 证明 H 中的每个非零元素是 H 中的可逆元.

解.

(i) 设 $W = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$ 和 $Z = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$, 其中 $u, v, x, y \in \mathbb{C}$. 我们有

$$W - Z = \begin{pmatrix} u - x & v - y \\ -\bar{v} + \bar{y} & \bar{u} - \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - x & v - y \\ -\overline{v - y} & \overline{u - x} \end{pmatrix} \in H.$$

故 $(H, +, O)$ 是 $(\mathrm{M}_2(\mathbb{C}), +, O)$ 的子群.

计算

$$WZ = \begin{pmatrix} ux - v\bar{y} & uy + v\bar{x} \\ -\bar{v}x - \bar{u}\bar{y} & -\bar{v}y + \bar{u}\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux - v\bar{y} & uy + v\bar{x} \\ -\overline{(uy + v\bar{x})} & \overline{ux - v\bar{y}} \end{pmatrix} \in H.$$

注意到

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in H.$$

故 H 是 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 的子环.

(ii) 设 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$. 则 $A, B \in H$. 直接计算得

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $AB \neq BA$, 所以 H 不是交换环.

(iii) 设 $W \neq O$. 则 $\det(W) = |u|^2 + |v^2| \neq 0$. 故 W 是可逆矩阵. 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 中,

$$W^{-1} = \frac{1}{u\bar{u} + v\bar{v}} \begin{pmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u \end{pmatrix}.$$

因为 $u\bar{u} + v\bar{v} \in \mathbb{R}$, 所以 $W^{-1} \in H$. 故 W 在 H 中可逆. $\square$

2. (15分) 设线性算子:

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{A}: & \mathbb{R}[x]^{(4)} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]^{(4)} \\ & f & \mapsto & \frac{df}{dx} \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{cccc} \mathcal{B}: & \mathbb{R}[x]^{(4)} & \longrightarrow & \mathbb{R}[x]^{(4)} \\ & f & \mapsto & x\frac{df}{dx} - 2f \end{array}.$$

(i) (5分) 计算 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 在基底 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵.

(ii) (5分) 计算 $\ker(\mathcal{A}), \ker(\mathcal{B}), \mathrm{im}(\mathcal{A}), \mathrm{im}(\mathcal{B})$ 的维数.

(iii) (5分) 判断 $\ker(\mathcal{A}) + \mathrm{im}(\mathcal{A})$ 是不是直和, $\ker(\mathcal{B}) + \mathrm{im}(\mathcal{B})$ 是不是直和, 并说明理由.

解. *(i)* 直接计算得 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 在给定基下的矩阵分别是:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) 因为 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = 3$, 所以 $\dim(\mathrm{im}(\mathcal{A})) = \dim(\mathrm{im}(\mathcal{B})) = 3$. 由对偶定理可知 $\dim(\ker(\mathcal{A})) = \dim(\ker(\mathcal{B})) = 1$.

(iii) 因为 $1 \in \ker(\mathcal{A}) \cap \mathrm{im}(\mathcal{A})$, 所以 $\ker(\mathcal{A}) + \mathrm{im}(\mathcal{A})$ 不是直和. 因为 $\ker(\mathcal{B}) = \langle x^2 \rangle$ 和 $\mathrm{im}(\mathcal{B}) = \langle 1, x, x^3 \rangle$. 所以 $\ker(\mathcal{B}) \cap \mathrm{im}(\mathcal{B}) = \{0\}$. 故 $\ker(\mathcal{B}) + \mathrm{im}(\mathcal{B})$ 是直和. $\square$

3. (15分) 设 $\mathbb{Q}^3$ 上的二次型 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$.

(i) (5分) 计算 q 在 $\mathbb{Q}^3$ 的标准基下的矩阵 A.

(ii) (5分) 计算 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ 使得 P^tAP 是对角矩阵.

(iii) (5分) 判断是否存在 $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ 使得 $A = M^tM$, 是否存在 $N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ 使得 $A = N^tN$, 并说明理由.

解. *(i)* q 在标准基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) 由行列相伴消元得矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

直接验证得 $P^tAP = \mathrm{diag}(1, -5, 1)$.

(iii) 如果存在 $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ 使得 $A = M^tM$, 则 A 是半正定的. 但 A 的签名是 $(2, 1)$. 故它是不定的. 于是, 这样的 M 不存在. 但 $\mathrm{rank}(A) = 3$. 故当 A 作为复数域上的矩阵时, $A \sim_c E_3$. 于是, 这样的 M 存在. □

4. (15分) 设三阶实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

(i) (5分) 设 A 是正定的. 求 a 的取值范围.

(ii) (5分) 设 A 是负定的. 求 a 的取值范围.

(iii) (5分) 设 A 是半正定的但不是正定的. 求 a 的取值范围.

解. 矩阵 A 的三个顺序主子式分别是:

$$\Delta_1 = a, \quad \Delta_2 = a^2 - 1 = (a-1)(a+1), \quad \Delta_3 = (a^2-1)(a+1) = (a-1)(a+1)^2.$$

(i) 矩阵 A 正定当且仅当 $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ $a > 0$ 当且仅当 $a > 1$.

(ii) 矩阵 A 负定当且仅当 $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$ $a > 0$ 当且仅当 $a < -1$.

(iii) 此时 $\mathrm{rank}(A) < 3$. 故 $\det(A) = 0$. 于是, $a = \pm 1$.

当 $a = 1$ 时, 利用行列相伴法得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

于是, A 半正定.

当 $a=-1$ 时, 利用行列相伴法得

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim_c\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

于是, A 半负定. 综上, 只有 $a=1$ 时, A 半正定且不正定. □

5. (10分) 设 $f_n=x^n-9\in\mathbb{Q}[x]$. 判断 f_3,f_4,f_5 是否在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约, 并说明理由.

解. 多项式 $f_3=x^3-9$. 因为 9 的立方根不是整数, 所以 f_3 没有一次因子. 故 f_3 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约. 多项式 $f_4=x^4-9=(x^2-3)(x^2+3)$. 故 f_4 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约. 注意到

$$f_5(x-1)=(x-1)^5-9=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-10.$$

对上述多项式和素数 5 用 Eisenstein 判别法得 $f_5(x-1)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约. 故 f_5 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中也不可约. □

6. (10分) 设 A,B 是两个域 F 上的列数为 n 的矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$$

当且仅当

$$\dim(V_A+V_B)=n,$$

其中 V_A 和 V_B 分别代表以矩阵 A 和 B 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间.

证明. 设 $M=\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$. 根据对偶定理, 我们只要证明

$$\dim(V_A)+\dim(V_B)=n+\dim(V_M)\Longleftrightarrow\dim(V_A+V_B)=n$$

其中 V_M 是以矩阵 M 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间. 因为 $V_M=V_A\cap V_B$, 所以, 等价于证明

$$\dim(V_A)+\dim(V_B)=n+\dim(V_A\cap V_B)\Longleftrightarrow\dim(V_A+V_B)=n.$$

根据维数公式, 上面的等价性显然成立. □

7. (10分) 设 $A\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 是正定矩阵.

(i) (5分) 证明 A^{-1} 是正定矩阵.

(ii) (5分) 再设 $A^\vee$ 是 A 的伴随矩阵. 证明: $A^\vee$ 也是正定矩阵.

证明. (i) 设 $A = P^tP$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 则 $A^{-1} = P^{-1}(P^t)^{-1} = P^{-1}(P^{-1})^t$. 故 A^{-1} 正定.

(ii). 注意到 $A^\vee = \det(A)A^{-1}$ 且 $\det(A) > 0$. 由上式可知

$$A^\vee = (\sqrt{\det(A)}P^{-1})(\sqrt{\det(A)}P^{-1})^t.$$

故 $A^\vee$ 正定. □

8. (10分) 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的有限维线性空间, U 是 V 的子空间, q 是 V 上的二次型, q_U 是 q 在 U 上的限制函数, 即

$$\begin{array}{rccc} q_U: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} & \mapsto & q(\mathbf{x}). \end{array}$$

(i) (5分) 证明 q_U 是 U 上的二次型;

(ii) (5分) 设 q 的签名是 (k, ℓ), q_U 的签名是 (s, t). 证明 $k \geq s$ 和 $\ell \geq t$.

证明. *(i)* 设 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是 q 的配极. 则 $f|_{U\times U}$ 是 q_U 的配极. 故 q_U 是 U 上的双线性型.

(ii) 由惯性定理, 存在 V 的一组基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 使得对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$,

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2.$$

同理, 存在 U 的一组基 $\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_d$ 使得对任意 $\mathbf{y} = y_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + \ldots + y_d\boldsymbol{\epsilon}_d$,

$$q_U(\mathbf{y}) = y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_{s+t}^2.$$

假设 $s > k$. 令

$$H = \langle \boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_s \rangle, \quad W = \langle \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle.$$

则 $\dim(H) = s$ 和 $\dim(W) = n - k > n - s$. 故 $H \cap W$ 中有非零向量 $\mathbf{z}$. 因为 $\mathbf{z} \in H$, 所以 $q_U(\mathbf{z}) > 0$. 因为 $\mathbf{z} \in W$, 所以 $q(\mathbf{z}) \leq 0$. 但 $q(\mathbf{z}) = q_U(\mathbf{z})$, 矛盾.

考虑 $-q$ 和 $-q_U$, 我们利用上述推理可得 $t \leq \ell$. □

(ii) 的另一个证法. 根据惯性定理, 存在 U 的一组基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ 使得 q_U 在基底下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

把 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k$ 扩充为 V 的一组基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_{k+1},\ldots,\mathbf{e}_n$. 则 q 在这组基下的矩阵形如:

$$B=\begin{pmatrix} A & M \\ M^t & N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & O & M_1 \\ O & O & M_2 \\ M_1^t & M_2^t & N \end{pmatrix},$$

其中 $A_1=\begin{pmatrix} E_s & O \\ O & -E_t \end{pmatrix}$ 且 $M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$. 由行列相伴法可知

$$B\sim_c \begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & O & M_2 \\ O & M_2^t & N \end{pmatrix}=:C.$$

因为 $\begin{pmatrix} O & M_2 \\ M_2^t & N \end{pmatrix}$ 对称, 所以存在 $P\in \mathrm{GL}_{n-s-t}(\mathbb{R})$ 使得 $D:=P^t\begin{pmatrix} O & M_2 \\ M_2^t & N \end{pmatrix}P$ 是对角阵. 令

$$Q=\begin{pmatrix} E_{s+t} & O \\ O & P \end{pmatrix}.$$

则 $Q\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 且

$$Q^tCQ=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

我们得到

$$B\sim_c\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

因为 B 的签名 (k,ℓ) 是合同不变量, 所以

$$k=s+D\text{ 中正元素的个数}\geq s$$

且

$$\ell=t+D\text{ 中负元素的个数}\geq t.\quad\square$$