# 中国科学院大学二零二一年秋季线性代数期中考试卷

编号：B01GB001Y-B02　名称：线性代数 I-B　教师：李子明、何适、姚卓雅

**姓名:**　　　　　　　　**学号:**

注意事项：

1.考试时间为 120 分钟，考试方式为闭卷；

2.全部答案写在答题纸上；

3.考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (15分) 设置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 1 & 5 & 7 & 9 & 6 & 4 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) 把 $\sigma$ 写成互不相交的循环之积.

(ii) 计算 $\sigma$ 的阶.

(iii) 确定 $\sigma$ 的奇偶性.

解. (i) $\sigma = (1,10,2)(3,5,9,8)(4,7)$.

(ii) $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{lcm}(3,4,2) = 12$.

(iii) $\epsilon_\sigma = (-1)^{2+3+1} = 1$. 故 $\sigma$ 是偶置换.

2. (15分) 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的标准基, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基, 线性映射 $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ 满足

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{e}_1) = \epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 2\epsilon_3 \\ \phi(\mathbf{e}_2) = 3\epsilon_2 + 3\epsilon_3 \\ \phi(\mathbf{e}_3) = \epsilon_1 + 3\epsilon_2 + \epsilon_3 \\ \phi(\mathbf{e}_4) = \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 \end{cases}$$

计算:

(i) $\phi$ 在基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4; \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 下的矩阵;

(ii) $\ker(\phi)$ 和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的维数;

(iii) $\ker(\phi)$ 的一组基和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基.

解. (i) 由 $A_\phi=(\phi(\mathbf{e}_1),\phi(\mathbf{e}_2),\phi(\mathbf{e}_3),\phi(\mathbf{e}_4))$ 得

$$A_\phi=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\4&3&3&1\\2&3&1&-1\end{pmatrix}.$$

(ii) 计算

$$A_\phi\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&3&-1&-3\\0&3&-1&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&3&-1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $\operatorname{rank}(A_\phi)=2$. 于是, $\dim(\operatorname{im}(\phi))=2$. 由对偶定理可知, $\dim(\ker(\phi))=4-2=2$.
(iii) 因为 $\dim(\operatorname{im}(\phi))=2$ 且 $A_\phi$ 的前两列线性无关, 所以 $\vec{A}_\phi^{(1)}$ 和 $\vec{A}_\phi^{(2)}$ 是 $\operatorname{im}(\phi)$ 的一组基. 求解以 $A_\phi$ 为系数矩阵的齐次线性方程组得

$$x_1=-x_3-x_4,\quad \text{和}\quad 3x_2=x_3+3x_4.$$

故 $\ker(\phi)$ 的一组基是

$$\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

3. (10分) 设 $\mathbb{R}$ 上的矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. 计算:

(i) $AB$ 和 $BA$;

(ii) 计算 $\operatorname{rank}(AB)$ 和 $\operatorname{rank}(BA)$.

解. (i) 直接计算得

$$AB=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

和

$$BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}.$$

(ii) 显然 $\operatorname{rank}(AB)=1$. 注意到

$$BA \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $\operatorname{rank}(BA)=2$.

4. (15分) 设 $U$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间. 对 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$, 如果 $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in U$, 则称 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 关于 $U$ 等价, 记为 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$.

(i) 验证: $\sim_U$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的等价关系.

(ii) 证明: $\mathbf{x}$ 关于 $\sim_U$ 的等价类等于 $\mathbf{x}+U$, 即集合 $\{\mathbf{x}+\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \in U\}$.

证明. (i) 对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{0} \in U$. 故 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{x}$. 自反性成立. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$. 则 $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in U$. 故 $\mathbf{y}-\mathbf{x} \in U$. 由此可知, $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{x}$. 对称性成立. 再设 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$ 和 $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{z}$. 则 $\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{y}-\mathbf{z} \in U$. 故

$$\mathbf{x}-\mathbf{z}=(\mathbf{x}-\mathbf{y})+(\mathbf{y}-\mathbf{z}) \in U.$$

我们得到 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{z}$. 传递性成立.
(ii) 设 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$. 则 $\mathbf{y}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ 且 $\mathbf{y}-\mathbf{x} \in U$. 故 $\mathbf{y} \in \mathbf{x}+U$. 反之, 设 $\mathbf{y} \in \mathbf{x}+U$. 则存在 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{u}$. 故 $\mathbf{y}-\mathbf{x}=\mathbf{u} \in U$. 由此可知, $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{x}$. 于是, $\mathbf{x}$ 等价类是 $\mathbf{x}+U$. $\square$

5. (10分) 设 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ 且 $\gcd(m,n)=1$. 证明:

(i) 对任意 $k \in \mathbb{Z}$, 以 $x, y$ 为未知数的方程 $mx+ny=k$ 有整数解;

(ii) 设

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}, ma+nb=0. \right\}.$$

判断 $S$ 是不是 $\mathbb{R}^2$ 中的子空间, 并说明理由.

证明. (i) 根据 Bezout 关系, 存在 $u, v \in \mathbb{Z}$, 使得 $um+vn=1$. 故 $m(uk)+n(vk)=k$. 由此可知, $x=uk$ 和 $y=vk$ 是整数解.

(ii) 因为 $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix} \in S$ 但 $\sqrt{2}\mathbf{v} \notin S$, 所以 $S$ 不是子空间. $\square$

6. (10分) 设 $V, W \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间, 它们的基底分别是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 和 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell$.

(i) 证明: $V+W$ 是直和(即 $V\cap W=\{\mathbf{0}\}$) 当且仅当 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_\ell$ 是 $V+W$ 的一组基.

(ii) 设 $V+W$ 是直和. 计算由集合 $S=\{\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_j\,|\,i=1,2,\ldots,k,j=1,2,\ldots,\ell\}$ 生成的子空间的维数.

证明. (i) 设 $V\cap W=\{\mathbf{0}\}$. 则维数公式蕴含 $\dim(V+W)=\ell+k$. 因为 $V+W$ 可由 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_\ell$ 生成, 所以这组向量含有 $V+W$ 的一个基底. 再由

$$\dim(V+W)=k+\ell$$

可知,

$$\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_\ell$$

必然是 $V+W$ 的基.

反之, 假设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_\ell$ 是 $V+W$ 的一组基. 则 $\dim(V+W)=k+\ell$. 由维数公式可知, $V\cap W=\{\mathbf{0}\}$.

(ii) 集合 $S$ 中的每个向量是集合

$$T=\{\mathbf{v}_1+\mathbf{w}_1,\mathbf{v}_2+\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{v}_k+\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_\ell\}.$$

的线性组合. 这是因为 $\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_j=(\mathbf{v}_i+\mathbf{w}_1)-(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_j)$, 其中 $i=1,\ldots,k$, $j=1,\ldots,\ell$. 进而, $T\subset\langle S\rangle$. 故 $\langle S\rangle=\langle T\rangle$. 下面证明 $T$ 中的向量线性无关.

设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_2,\ldots,\beta_\ell\in\mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1(\mathbf{v}_1+\mathbf{w}_1)+\cdots+\alpha_k(\mathbf{v}_k+\mathbf{w}_1)+\beta_2(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)+\cdots+\beta_\ell(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_\ell)=\mathbf{0}.$$

则

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k+(\alpha_1+\cdots+\alpha_k+\beta_2+\cdots+\beta_\ell)\mathbf{w}_1-\beta_2\mathbf{w}_2-\cdots+\beta_\ell\mathbf{w}_\ell=\mathbf{0}.$$

由 (i) 可知, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_\ell$ 线性无关. 故 $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=\beta_2=\cdots=\beta_\ell=0$. 因为 $T$ 中向量线性无关且 $\langle T\rangle=\langle S\rangle$, 所以 $\dim(\langle S\rangle)=k+\ell-1$. □

7. (10分) 设 $A,D\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 其中 $D$ 是对角矩阵且其对角线上的元素两两不同. 证明：

(i) $\operatorname{rank}(DA)\geq\operatorname{rank}(A)-1$;

(ii) 如果 $DA=AD$, 则 $A$ 也是对角矩阵.

证明. (i) 设 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, 两两不同. 故 $\mathrm{rank}(D) \geq n-1$. 由 Sylvester 不等式,

$$\mathrm{rank}(DA) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(D) - n \geq \mathrm{rank}(A) + n - 1 - n = \mathrm{rank}(A) - 1.$$

(ii) 因为

$$DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \vec{A}_n \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad AD = \left( \lambda_1 \vec{A}^{(1)}, \ldots, \lambda_n \vec{A}^{(n)} \right).$$

设 $A = (a_{i,j})$. 则 $DA = AD$ 蕴含 $\lambda_i a_{i,j} = \lambda_j a_{i,j}$, 即 $(\lambda_i - \lambda_j) a_{i,j} = 0$. 当 $i \neq j$ 时, $\lambda_i \neq \lambda_j$. 由此可知 $a_{i,j} = 0$, 即 $A$ 是对角矩阵.

8. (15分) 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是线性映射. 证明:

(i) 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, $\ker(\phi^k) \subset \ker(\phi^{k+1})$;

(ii) 存在 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $\ker(\phi^\ell) = \ker(\phi^{\ell+1})$;

(iii) 如果 $\ker(\phi^\ell) = \ker(\phi^{\ell+1})$, 则对任意的 $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$\ker(\phi^\ell) = \ker(\phi^{\ell+m}) \quad \text{且} \quad \mathrm{im}(\phi^\ell) = \mathrm{im}(\phi^{\ell+m}).$$

证明. (i) 设 $\mathbf{x} \in \ker(\phi^k)$. 则 $\phi^k(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 于是, $\phi^{k+1}(\mathbf{x}) = \phi(\phi^k(\mathbf{x})) = \phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{x} \in \ker(\phi^{k+1})$.
(ii) 假设这样的 $\ell$ 不存在. 则 (i) 中的结论蕴含

$$\ker(\phi) \subsetneqq \ker(\phi^2) \subsetneqq \ker(\phi^3) \subsetneqq \cdots.$$

于是, 我们有维数不等式:

$$\dim(\ker(\phi)) < \dim(\ker(\phi^2)) < \dim(\ker(\phi^3)) < \cdots.$$

这与对任意 $k > 0$, $\dim(\ker(\phi^k)) \leq n$ 相矛盾.
(iii) 先证: 对任意 $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$\ker(\phi^\ell) = \ker(\phi^{\ell+m})$$

对 $m$ 归纳. 当 $m = 1$ 时, 结论显然. 设 $m > 1$ 且 $\ker(\phi^\ell) = \ker(\phi^{\ell+m-1})$. 设 $\mathbf{x} \in \ker(\phi^{\ell+m})$. 则 $\phi^{\ell+m}(\mathbf{x}) = 0$. 于是, $\phi^{\ell+m-1}(\phi(\mathbf{x})) = 0$. 故 $\phi(x) \in \ker(\phi^{\ell+m-1})$. 由归纳假设可知 $\phi(\mathbf{x}) \in \ker(\phi^\ell)$. 故 $\mathbf{x} \in \ker(\phi^{\ell+1})$. 由此可知, $\mathbf{x} \in \ker(\phi^\ell)$. 我们得到 $\ker(\phi^{\ell+m}) \subset \ker(\phi^\ell)$. 再由 (i) 得出, $\ker(\phi^\ell) = \ker(\phi^{\ell+m})$.

由对偶定理可知, 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, $\dim(\ker(\phi^k)) + \dim(\mathrm{im}(\phi^k)) = n$. 再由

$$\ker(\phi^\ell) = \ker(\phi^{\ell+m})$$

可知, $\dim(\mathrm{im}(\phi^\ell)) = \dim(\mathrm{im}(\phi^{\ell+m}))$. 设 $\mathbf{y} \in \mathrm{im}(\phi^{\ell+m})$. 则存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{y} = \phi^{\ell+m}(\mathbf{x})$. 故 $\mathbf{y} = \phi^\ell(\phi^m(\mathbf{x}))$. 由此可知, $\mathbf{y} \in \mathrm{im}(\phi^\ell)$. 即 $\mathrm{im}(\phi^{\ell+m}) \subset \mathrm{im}(\phi^\ell)$. 再根据上面的维数等式推出 $\mathrm{im}(\phi^\ell) = \mathrm{im}(\phi^{\ell+m})$. $\square$