中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB003Y-B02

课程名称：线性代数II-B（期末A卷）

任课教师：李子明、高艺漫、何适

注意事项：

1. 考试时间为180 分钟，考试方式闭卷；
2. 全部答案写在答题纸上；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

蓝色基于同学们的卷子

1. (10分) 设 V 是域 F 上的线性空间, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是 V 的一组基. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_3$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1$. 计算:

   (i) (3分) $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 的矩阵;

   (ii) (3分) $\operatorname{rank}(\mathcal{A})$ 和 $\dim(\ker(\mathcal{A}))$;

   (iii) (4分) 循环子空间 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{e}_2$ 的维数.

   解. *(i)* 由 $\mathcal{A}$ 定义可知,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (ii) 因为 $\operatorname{rank}(A) = 2$, 所以 $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = 2$. 由对偶定理可知, $\dim(\ker(\mathcal{A})) = 1$.

   (iii) 直接计算得

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2,\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3,\ \mathcal{A}^2(\mathbf{e}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1.$$

   因为 $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1$ 线性无关, 所以 $\dim(F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{e}_2) = 3$.

2. (10分) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 其特征多项式和极小多项是分别记为 χ_A 和 μ_A. 根据下述条件写出 A 的 Jordan 标准型 J_A 并说明理由.

   (i) (3分) $\chi_A(t) = (t-1)^2(t-2)$, $\mu_A(t) = (t-1)(t-2)$.

   (ii) (3分) $\chi_A(t) = (t+1)^5$, $\mu_A(t) = (t+1)^3$, 特征根 $\lambda = -1$ 的几何重数为 2.

   (iii) (4分) $\chi_A(t) = (t-2)^4(t+2)^3$, $\mu_A(t) = (t-2)^2(t+2)^2$, 特征根 λ=2 的几何重数为 3.

解. *(i)* 由特征多项式的次数可知, $n=3$. 因为极小多项式无重根, 所以 A 可对角化. 根据特征根的代数重数可知

$$J_A = \mathrm{diag}(1,1,2).$$

(ii) 由特征多项式的次数可知, $n=5$. 由极小多项式可知, J_A 中阶最大的 *Jordan* 块是 $J_3(-1)$. 由几何重数条件可知 J_A 中共有两个 *Jordan* 块. 于是,

$$J_A = \mathrm{diag}(J_3(-1), J_2(-1)).$$

(iii) 由特征多项式的次数可知, $n=7$. 由极小多项式可知, J_A 中阶最大的 *Jordan* 块是 $J_2(2)$ 和 $J_2(-2)$. 由几何重数的条件可知, 关于特征值 2 的 *Jordan* 块共三块. 再利用代数重数的条件得

$$J_A = \mathrm{diag}(J_2(2), J_1(2), J_1(2), J_2(-2), J_1(-2)).$$

3. (10分) 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧氏空间, U 是以

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间. 记 $U^\perp$ 为 U 的正交补. 计算

(i) (5分) $\dim(U)$ 和 $\dim(U^\perp)$;

(ii) (5分) $U^\perp$ 的一组单位正交基.

解*(i)* 利用高斯消去法可知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\mathrm{rank}(A)=2$. 根据对偶定理, $\dim(U)=2$. 再根据 $\dim(U)+\dim(U^\perp)=4$, $\dim(U^\perp)=2$.

(ii) 因为 $\dim(U^\perp)=2$ 且 $\vec{A}_1, \vec{A}_2$ 线性无关, 所以

$$U^\perp = \langle \vec{A}_1^t, \vec{A}_2^t \rangle.$$

由 *Gram-Schmidt* 正交化,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{2}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

于是, $U^\perp$ 的一组单位正交基是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

4. (10分) 设三阶实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

其特征多项式是 $t(t-3)^2$. 计算正交矩阵 P 和对角矩阵 D 使得 $D = P^t AP$.

解. 矩阵 A 两个特征根 $\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_2 = 3$. 由它们的代数重数可知,

$$D = \mathrm{diag}(0, 3, 3). \quad \textit{(5分)}$$

因为 A 可对角化, $\dim(V^{\lambda_2}) = 2$. 于是,

$$\mathrm{rank}(\lambda_2 E - A) = \mathrm{rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = 1.$$

故 V^{λ_2} 是 $x_1 - x_2 + x_3$ 的解空间, 即

$$V^{\lambda_2} = \langle (1, 1, 0)^t, (1, 0, -1)^t \rangle.$$

因为 $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$ 且 $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$, 所以 $V^{\lambda_1} = \left(V^{\lambda_2}\right)^{\perp}$. 故

$$V^{\lambda_1} = \langle (1, -1, 1)^t \rangle.$$

由 *Gram-Schmidt* 正交化可知

$$V^{\lambda_1} = \langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^t \rangle$$

和

$$V^{\lambda_2} = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^t, \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)^t \rangle.$$

由此得出

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \quad \textit{(5分)}$$

5. (10分) 计算 $J_5(0)^2$ 和 $J_5(0)^3$ 的 Jordan 标准型.

解. 设 $A = J_5(0)^2$. 则 $\chi_A(t) = t^5$.

$$n_1 = \mathrm{rank}(A^0) + \mathrm{rank}(A^2) - 2\mathrm{rank}(A) = 5 + 1 - 2 \times 3 = 0.$$

$$n_2 = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A^3) - 3\mathrm{rank}(A^2) = 3 + 0 - 2 \times 1 = 1.$$

于是, A 的 *Jordan* 标准型是 $\mathrm{diag}(J_3(0), J_2(0))$. *(5分)*

设 $B = J_5(0)^3$. 则 $\chi_B(t) = t^5$.

$$n_1 = \mathrm{rank}(B^0) + \mathrm{rank}(B^2) - 2\mathrm{rank}(B) = 5 + 0 - 2 \times 2 = 1.$$

$$n_2 = \mathrm{rank}(B) + \mathrm{rank}(B^3) - 2\mathrm{rank}(B^2) = 2 + 0 - 0 = 2.$$

于是, B 的 *Jordan* 标准型是 $\mathrm{diag}(J_2(0), J_2(0), J_1(0))$. *(5分)*

6. (10分) 设 V 是域 F 上的线性空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 可逆. 证明:

   (i) (5分) 如果 $\mathbf{v} \in V$ 是 $\mathcal{A}$ 特征向量, 则 $\mathbf{v}$ 也是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征向量;

   (ii) (5分) 如果 $W \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间, 则 W 也是 $\mathcal{A}^{-1}$-不变子空间.

证明. *(i)* 设 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, 其中 $\lambda \in F$. 因为 $\mathcal{A}$ 可逆, 所以 $\lambda \neq 0$. 则

$$\mathbf{v} = \lambda\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{v}) \Longrightarrow \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{v}) = \lambda^{-1}\mathbf{v}.$$

故 $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征向量.

(ii) 因为 $\mathcal{A}$ 可逆, 所以 $\mathcal{A}_W$ 也是单射. 因为 $\mathcal{A}_W \in \mathcal{L}(W)$, 所以 $\mathcal{A}_W$ 是满射. 故 $\mathcal{A}_W$ 是双射. 设 $\mathbf{w} \in W$. 则存在 $\mathbf{v} \in W$ 使得 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. 故 $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \in W$. 于是, W 也是 $\mathcal{A}^{-1}$-不变的.

另证. 由矩阵求逆的多项式法可知, $\mathcal{A}^{-1} \in F[\mathcal{A}]$. 由此可知, 存在 $p \in F[t]$ 使得 $\mathcal{A}^{-1} = p(\mathcal{A})$.

(i) 设 $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, 其中 $\lambda \in F$. 则

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{v}) = p(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = p(\lambda)\mathbf{v}.$$

故 $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征向量.

(ii) 设 $\mathbf{x} \in W$. 因为 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in W$, 所以

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{x}) = p(\mathcal{A})(\mathbf{x}) \in W.$$

故 W 也是 $\mathcal{A}^{-1}$-不变的.

7. (10分) 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}$ 是 V 的单位向量. 设

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & 2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{x} \end{array}.$$

   (i) (5分) 证明: $\mathcal{A}$ 是线性算子.

   (ii) (5分) 证明: $\mathcal{A}$ 既是对称算子又是正交算子.

证明. *(i)* 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = 2(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v}-(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha(2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v}-\mathbf{x})+\beta(2(\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v}-\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{x})+\beta(\mathcal{A}(\mathbf{y})).$$

于是, $\mathcal{A}$ 是线性算子.

因为 $\mathbf{v}$ 是单位向量, 所以 V 有一组单位正交基 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. 则 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$ 且 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_j) = -\mathbf{e}_j$, $j = 2, 3, \ldots, n$. 故 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_2$ 下的矩阵是

$$A = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1).$$

(ii) 因为 A 对称, 所以 $\mathcal{A}$ 对称. 因为 $A^tA = E$, 所以 A 正交. 故 $\mathcal{A}$ 正交.

8. (10分) 设 V 是域 F 上的线性空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 设 $p \in F[t] \setminus F$ 使得 $\mathcal{A}$ 的极小多项式 $\mu_{\mathcal{A}}(t) = p^k q$, 其中 $q \in F[t]$ 且 $\gcd(p, q) = 1$, 证明:

   (i) (5分) $V = \ker(p^k) \oplus \ker(q)$ 且 k 不大于 p 在 $\mathcal{A}$ 的特征多项式中的重数,

   (ii) (5分) $\ker\left(p(\mathcal{A})^{k-1}\right) \subsetneqq \ker\left(p(\mathcal{A})^k\right) = \ker\left(p(\mathcal{A})^{k+1}\right)$.

证明. *(i)* 因为 $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ 且 $\gcd(p^k, q) = 1$, 所以核核分解定理蕴含

$$V = \ker(p^k) \oplus \ker(q).$$

根据 *Cayley-Hamilton* 定理, $p^k|\chi_{\mathcal{A}}$. 故 p 在 $\chi_{\mathcal{A}}$ 中的重数大于或等于 k.

(ii) 如果 $\ker(p^{k-1}(\mathcal{A})) = \ker(p^k(\mathcal{A}))$, 则 *(i)* 中核核分解蕴含

$$V = \ker(p^{k-1}(\mathcal{A})) \oplus \ker(q(\mathcal{A})).$$

故 $p^{k-1}q$ 零化 $\mathcal{A}$. 于是, $\mu_{\mathcal{A}} = p^k q | p^{k-1}q$, 矛盾.

因为 $\mu_{\mathcal{A}}|p^{k+1}q$, 所以核核分解定理蕴含

$$V = \ker(p^{k+1}(\mathcal{A})) \oplus \ker(q(\mathcal{A})).$$

故

$$\dim(\ker(p^{k+1}(\mathcal{A}))) + \dim(\ker(q(\mathcal{A}))) = \dim(\ker(p^k(\mathcal{A}))) + \dim(\ker(q(\mathcal{A}))).$$

于是

$$\dim(\ker(p^{k+1}(\mathcal{A}))) = \dim(\ker(p^k(\mathcal{A}))).$$

综上所述和事实

$$\ker\left(p(\mathcal{A})^{k-1}\right) \subset \ker\left(p(\mathcal{A})^k\right) \subset \ker\left(p(\mathcal{A})^{k+1}\right),$$

我们有

$$\ker\left(p(\mathcal{A})^{k-1}\right) \subsetneqq \ker\left(p(\mathcal{A})^k\right) = \ker\left(p(\mathcal{A})^{k+1}\right).$$

9. (10分) 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明:

   (i) (5分) 如果 A 是正交矩阵且 $\det(A) = -1$, 则 -1 是 A 的特征根;

   (ii) (5分) 如果 A 是正定矩阵且B 是斜对称矩阵, 则 $A + B$ 是可逆矩阵.

证明. *(i)* 因为 A 是正交矩阵, 所以存在正交矩阵 P 使得

$$P^t AP = \mathrm{diag}(N(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)), \ldots, N(\cos(\theta_s), \sin(\theta_s)), \underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{\ell}).$$

于是, $\det(A) = (-1)^{\ell}$. 因为 $\det(A) = -1$, 所以 $\ell > 0$. 故 -1 是 A 的一个特征根.

(ii) 因为 A 正定, 所以存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^t AP = E$. 令 $C = P^t BP$. 则 C 是斜对称的. 故存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^t CQ = \mathrm{diag}(N(0, \beta_1), \ldots, N(0, \beta_s), 0, \ldots, 0).$$

于是

$$\begin{aligned}
Q^t P^t (A + B)PQ &= Q^t (P^t AP + P^t BP)Q \\
&= Q^t (E + C)Q \\
&= E + Q^t CQ \\
&= E + \mathrm{diag}(N(0, \beta_1), \ldots, N(0, \beta_s), 0, \ldots, 0) \\
&= \mathrm{diag}(N(1, \beta_1), \ldots, N(1, \beta_s), 1, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

于是 $\det(Q^t P^t (A + B)PQ) = (1 + \beta_1^2) \cdots (1 + \beta_s^2) \neq 0$. 故 $A + B$ 可逆.

另证. *(i)* 计算

$$\det(E + A) = \det(A^t A + A) = \det(A^t + E)\det(A) = -\det(A^t + E) = -\det(E + A).$$

于是, $\det(E + A) = 0 \Longrightarrow \det(-E - A) = 0$. 故 -1 是 A 的特征根.

(ii) 假设 $A + B$ 是不可逆的. 则存在非零 $\mathbf{x} \in F^n$ 使得 $(A + B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 于是

$$\mathbf{x}^t (A + B)\mathbf{x} = 0.$$

对上式求转秩得

$$\mathbf{x}^t (A - B)\mathbf{x} = 0.$$

由此得出 $2\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = 0 \Longrightarrow \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = 0$. 因为 A 正定, 所以 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 矛盾.

10. (10分)

   (i) (4分) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 证明: 如果 A 可逆, 则 AB 和 BA 相似.

   (ii) (4分) 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明: AB 和 BA 的特征多项式相等.

(iii) (2分) 如果把 (ii) 中的实数域 $\mathbb{R}$ 换成域 F, AB 和 BA 的特征多项式是否仍相等, 并说明理由.

证明. *(i)* 因为 $AB = B^{-1}(BA)B$, 所以 $AB \sim_s BA$.

(ii) 存在实数 $a > 0$ 使得对任意 $\epsilon \in (0, a)$, $\epsilon E + B$ 可逆. 故 $A(\epsilon E + B) \sim_s (\epsilon E + B)A$. 因为特征多项式是相似不变量, 所以

$$\det(tE - A(\epsilon E + B)) = \det(tE - (\epsilon E + B)A).$$

注意到这个等式中关于 t 的系数都是 ϵ 的多项式. 所以当 $\epsilon = 0$ 时上述等式仍然成立, 即

$$\det(tE - AB)) = \det(tE - BA). \quad \square$$

(iii) 仍然成立. 把 *(ii)* 中 ϵ 换成 $F[t]$ 上的一个未定元. 则 $\epsilon E + B$ 的行列式不等于零. 故 $\epsilon E + B$ 可逆. 于是, 把 F 换成 $F[\epsilon]$ 的分式域, 由 *(i)* 可知, $A(\epsilon E + B) \sim_s (\epsilon E + B)A$. 故

$$\det(tE - A(\epsilon E + B)) = \det(tE - (\epsilon E + B)A).$$

注意到上述等式两端都是关于 t 和 ϵ 的多项式. 故 $\epsilon = 0$ 时, 我们有

$$\det(tE - AB) = \det(tE - BA).$$

另证 *(ii)* 和 *(iii)*.

方法二. 考虑分块矩阵

$$P = \begin{pmatrix} E & O \\ -A & E \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} tE & B \\ tA & tE \end{pmatrix}.$$

经计算, 我们有

$$PQ = \begin{pmatrix} tE & B \\ O & tE - AB \end{pmatrix}, \quad QP = \begin{pmatrix} tE - BA & B \\ O & tE \end{pmatrix}.$$

由 $\det(PQ) = \det(QP)$ 可得,

$$t^n \det(\lambda E - AB) = t^n \det(tE - BA).$$

从而

$$\det(tE - AB) = \det(tE - BA).$$

方法三. 考虑分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} E & -A \\ O & E \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} AB & O \\ B & O \end{pmatrix}.$$

容易看出 $M \in \mathrm{GL}_{2n}(F)$ 且

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix}.$$

令 $Q := M^{-1}PM$, 经计算, 我们得到

$$Q = \begin{pmatrix} O & O \\ B & BA \end{pmatrix}.$$

从而 $\chi_P = \chi_Q$, 即

$$t^n \det(tE - AB) = t^n \det(tE - BA).$$

故

$$\det(tE - AB) = \det(tE - BA).$$

方法四. 根据 *Sylvester* 等式(科斯特利金书第一卷第 *103* 页第 *9* 题) 可知,

$$\det(E + AB) = \det(E + BA).$$

设 t 是域 F 上得未定元. 把上式中 A 换成 $-\frac{1}{t}A$ 得

$$\det\left(E - \frac{1}{t}AB\right) = \det\left(E - \frac{1}{t}BA\right).$$

于是,

$$\frac{(-1)^n}{t^n}\det\left(tE - AB\right) = \frac{(-1)^n}{t^n}\det\left(tE - BA\right).$$

由此得出 $\det\left(tE - AB\right) = \det\left(tE - BA\right)$.