中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB001Y-B02

课程名称：线性代数I-B (A 卷)

任课教师：李子明、何适、姚卓雅

注意事项：

1. 考试时间为**180** 分钟，考试方式闭卷；

2. 全部答案写在答题纸上；

3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (10分) 设实数域上的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 求 $\det(A)$ 和 A^{-1}.

解. 直接计算得

$$(A|E) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

注意到我们通过第二类初等行变换把 A 化成了上三角矩阵, 而第二类初等行变换不改变行列式的值. 故 $\det(A) = -4$.

继续做初等变换得

$$\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

于是

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

2. (10分) 设 $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, $\phi : \mathbb{Z}_3^4 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^2$ 的线性映射, 它把 $\mathbb{Z}_3^4$ 的标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ 分别映为: $\phi(\mathbf{e}_1) = \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2$, $\phi(\mathbf{e}_2) = \bar{2}\boldsymbol{\epsilon}_2$, $\phi(\mathbf{e}_3) = \boldsymbol{\epsilon}_1$, $\phi(\mathbf{e}_4) = \bar{2}\boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2$, 其中 $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ 是 $\mathbb{Z}_3^2$ 的标准基.

(i) 计算 ϕ 在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4; \boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ 下的矩阵;

(ii) 分别计算 $\ker(\phi)$ 和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基.

解. (i) 矩阵表示

$$A = (\phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_2), \phi(\mathbf{e}_3), \phi(\mathbf{e}_4)) = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

(ii) 因为 $\mathrm{rank}(A) = 2$, 所以 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基是 $\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}$. 求解以 A 为系数矩阵的线性方程组. 我们有

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

故 $\ker(\phi)$ 的基是 $\begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$. □

3. (10分) 设 $f(x) = x^2 + x + 3, g(x) = 2x - 1$ 是有理数域上的多项式.

(i) 计算 $q = \mathrm{quo}(f, g, x)$ 和 $r = \mathrm{rem}(f, g, x)$.

(ii) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$. 计算 $q(A)$ 和 $r(A)$.

解 (i) 直接计算得

$$q = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}, \quad r = \frac{15}{4}.$$

(ii)

$$q(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}E_3 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 5/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}, \ r(A) = \begin{pmatrix} 15/4 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & 0 \\ 0 & 0 & 15/4 \end{pmatrix}. \quad \square$$

4. (10分) 设 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 是实数域上 n 阶可逆方阵关于矩阵乘法构成的群. 令

$$G = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

(i) 验证 G 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的子群;

(ii) 设 H=$\{B^{-1}AB \mid A \in G, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$. 问 H 是否等于 G? 并说明理由.

证明. (i) 设 $A, B \in G$. 则 $\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = 1$. 故 $AB^{-1} \in G$. 于是, G 是子群.

(ii) 对 $A \in G$, $A = EAE^{-1}$. 故 $G \subset H$. 反之, 设 $C \in H$. 则存在 $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A \in G$ 使得

$$C = B^{-1}AB \Longrightarrow \det(C) = \det(B^{-1})\det(A)\det(B) = \det(A) = 1 \Longrightarrow C \in G.$$

故 $H \subset G$. 综上可知, $H = G$. □

5. (10分) 设域 $(F, +, 0, \cdot, 1)$ 上的 n 阶矩阵

$$A_n = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{pmatrix}.$$

证明: $\det(A_n)$=$(n+1)a^n$, 并根据 F 的特征和 a 的取值确定何时 A_n 不可逆.

证明. 对 n 归纳. n=1 时, $\det(A_1)$=$2a$. 等式成立. 当 n=2 时, $\det(A_2)$=$3a^2$. 设 $n > 2$ 且结论对小于 n 的值都成立. 则

$$\det(A_n) = 2a\det(A_{n-1}) - a^2\det(A_{n-2}) = 2na^n - (n-1)a^n = (n+1)a^n.$$

故等式成立.

矩阵 A_n 不可逆当且仅当 $(n+1)a^n = 0$. 故当 F 的特征为零时, A_n 不可逆当且仅当 $a = 0$. 当 F 的特征为 $p > 0$ 时, A_n 不可逆当且仅当 $a = 0$ 或 $p|(n+1)$.
□

6. (10分) 设 $n > 1$ 且 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 设 A 的伴随矩阵 $A^\vee$ 的秩等于 1. 证明 A 不可逆, 并计算以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间的维数.

证明. 因为 $A^\vee$ 不满秩, 所以 A 不满秩. 故 A 不可逆. 因为 $\mathrm{rank}(A^\vee) = 1$, 所以 A 中有一个 $n-1$ 阶子式非零. 故 $\mathrm{rank}(A) = n-1$. 再根据对偶定理, A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间的维数是 $n - \mathrm{rank}(A) = 1$. □

7. (10分) 设 $\mathbb{R}^+$ 和 $\mathbb{Q}^+$ 分别代表正实数和正有理数的集合.

(i) 证明: 指数函数 $\exp(x)$ 是从加法群 $(\mathbb{R}, +, 0)$ 到乘法群 $(\mathbb{R}^+, \cdot, 1)$ 的同构.

(ii) 加法群 $(\mathbb{Q}, +, 0)$ 和乘法群 $(\mathbb{Q}^+, \cdot, 1)$ 是否同构? 并说明理由.

证明. (i) 因为 $\exp(x) > 0$, 所以 $\exp$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^+$ 的映射. 因为

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y),$$

所以 $\exp(x)$ 是群同态. 因为 $\log(x)$ 是 $\exp(x)$ 的逆映射, 所以 $\exp$ 是双射. 故 $\exp(x)$ 是群同构.

(ii) 假设 $\phi : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}$ 是同构. 则存在 $x \in \mathbb{Q}$, $\phi(x) = 2$. 于是

$$2 = \phi(x) = \phi\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \phi\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

故 $\phi(x/2) \notin \mathbb{Q}$. 矛盾. □

8. (10分) 设 G 是循环群, $G = \langle g \rangle$ 且 $\mathrm{card}(G) = n < \infty$.

(i) 设子群 $H = \langle g^k \rangle$, 其中 $k \in \mathbb{Z}^+$. 证明: $H = \langle g^d \rangle$, 其中 $d = \gcd(n, k)$.

(ii) 设 H_1 和 H_2 是 G 的子群满足 $\mathrm{card}(H_1) = \mathrm{card}(H_2)$. 证明: $H_1 = H_2$.

证明. (i) 根据 Bezout 关系, 存在 $u, v \in \mathbb{Z}$ 使得 $uk + vn = d$. 于是

$$g^d = g^{uk+vn} = (g^k)^u (g^n)^v.$$

因为 $g^n = e$, 其中 e 是 G 中的单位元, 所以 $g^d = (g^k)^u \in H$. 故 $\langle g^d \rangle \subset H$. 因为 $d|k$, 所以存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $k = md$. 故 $g^k = (g^d)^m$. 于是 $g^k \in \langle g^d \rangle$. 故 $H \subset \langle g^d \rangle$. 综上可知, $H = \langle g^d \rangle$.

(ii) 因为 G 的子群都是循环群, 所以可设 $H_1 = \langle g^{k_1} \rangle$ 和 $H_2 = \langle g^{k_2} \rangle$. 因为 $\mathrm{card}(H_1) = \mathrm{card}(H_2)$, 所以 $\mathrm{ord}(g^{k_1}) = \mathrm{ord}(g^{k_2})$. 故

$$\frac{n}{\gcd(n, k_1)} = \frac{n}{\gcd(n, k_2)}.$$

由此可知, $\gcd(n,k_1)=\gcd(n,k_2):=d$. 根据 (i), $H_1=\langle g^d\rangle$ 和 $H_2=\langle g^d\rangle$. 于是, $H_1=H_2$. □

9. (10分) 设 A 是域 F 上的 n 阶方阵, $B\in F[A]$ 且 B 不是零矩阵. 证明:

 (i) B 是 $F[A]$ 中的可逆元当且仅当 $\mathrm{rank}(B)=n$;

 (ii) B 是 $F[A]$ 中的零因子当且仅当 $\mathrm{rank}(B)<n$.

证明. (i) 如果 B 在 $F[A]$ 中可逆, 则 $B\in \mathrm{GL}_n(F)$. 故 $\mathrm{rank}(B)=n$. 反之, 设 $\mathrm{rank}(B)=n$. 则存在一个非零多项式 $f(x)\in F[x]$ 使得 $f(0)\neq 0$ 且 $f(B)=O$. 设

$$f(x)=f_mx^m+f_{m-1}x^{m-1}+\cdots+f_1x+f_0,$$

其中 $f_m,f_{m-1},\ldots,f_1,f_0\in F$ 且 $f_0\neq 0$. 我们有

$$f_mB^m+f_{m-1}B^{m-1}+\cdots+f_1B+f_0E=O.$$

故

$$B(f_mB^{m-1}+f_{m-1}B^{m-2}+\cdots+f_1E)=-f_0E.$$

由此可知

$$B^{-1}=-f_0^{-1}(f_mB^{m-1}+f_{m-1}B^{m-2}+\cdots+f_1E)\in F[B]\subset F[A].$$

于是, B 在 $F[A]$ 中可逆.

(ii) 如果 B 是 $F[A]$ 中的零因子, 则存在 $C\in F[A]$ 满足 $C\neq O$ 且 $BC=O$. 则 B 不可逆. 故 $\mathrm{rank}(B)<n$. 反之, 设 $\mathrm{rank}(B)<n$. 则存在次数最小的非零多项式 $g\in F[x]$ 使得 $g(B)=O$. 设

$$g(x)=g_\ell x^\ell+g_{\ell-1}x^{\ell-1}+\cdots+g_1x+g_0,$$

其中 $g_\ell,g_{\ell-1},\ldots,g_1,g_0\in F$, $g_\ell\neq 0$. 因为 B 不可逆, 所以 $g_0=0$. 由此可知,

$$g(B)=B(g_\ell B^{\ell-1}+g_{\ell-1}B^{\ell-2}+\cdots+g_1E)=O.$$

由 ℓ 的极小性可知 $C=g_\ell B^{\ell-1}+g_{\ell-1}B^{\ell-2}+\cdots+g_1E\neq O$. 因为 $BC=O$ 且 $C\in F[B]\subset F[A]$, 所以 B 是 $F[A]$ 中的零因子. □

10. (10分) 设 $A,B,C,D\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 令 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$.

(i) 证明: 如果 A 可逆, 则 $\operatorname{rank}(M) = n + \operatorname{rank}(D - CA^{-1}B)$.

(ii) 证明: 如果 A 可逆且 $CA = AC$, 则 $\det(M) = \det(AD - CB)$.

(iii) 如果 A 不可逆但 $CA = AC$, 问等式 $\det(M) = \det(AD - CB)$ 是否仍成立? 并说明理由.

证明. (i) 设 $N = \begin{pmatrix} E & O \\ CA^{-1} & E \end{pmatrix}$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵. 则

$$NM = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

再设 $L = \begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}$. 则

$$NML = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

因为 N, L 可逆, 所以

$$\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(NML) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(D - CA^{-1}B).$$

(ii) 由 (i) 可知,

$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CB) \quad (\because\ AC = CA).$$

(iii) 等式 $\det(M) = \det(AD - CB)$ 仍成立. 理由如下. 设 $A' = tE + A$, 其中 t 是一个未定元. 则 A' 可逆且

$$A'C = (tE + A)C = tC + AC = tC + CA = C(tE + A) = CA'.$$

由 (ii) 可知

$$\det \begin{pmatrix} A' & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A'D - CB).$$

因为上述两侧都是 t 的多项式, 所以当 $t = 0$ 时等式仍成立. 即

$$\det(M) = \det(AD - CB). \quad \square$$