

U-空间简介

2022年6月22日 6:39

回忆: 记号 V 是 \mathbb{C} 上有限维线性空间

$(\cdot | \cdot)$ 是 V 上内积,
称 V 为 U -空间

定义: 设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$

$$G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \left((\vec{v}_i | \vec{v}_j) \right)_{k \times k}$$

例 矩阵 $G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ 是 Hermitian

$$\begin{aligned} G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)^* &= \overline{(\vec{v}_i | \vec{v}_j)} \\ &= \overline{(\vec{v}_j | \vec{v}_i)} = (\vec{v}_j | \vec{v}_i) \\ &\quad \hookrightarrow \text{内积是 Hermitian} \end{aligned}$$

$$= G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$

基本性质: 设 $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$
 $\vec{y} = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_k \vec{v}_k$

$$(\vec{x} | \vec{y}) = (\alpha_1 \dots \alpha_k) G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_k} \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 线性无关

$$\Leftrightarrow \text{rank}(G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)) = k$$

§10.3 长度, 距离 和正交

设 $\vec{x} \in V$

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{(\vec{x}|\vec{x})}$$

设 $\vec{y} \in V$. 从 \vec{x} 到 \vec{y} 的距离是 $\|\vec{x} - \vec{y}\|$

如 $(\vec{x}|\vec{y}) = 0$, 则称 $\vec{x} \perp \vec{y}$

$$(\vec{x} \perp \vec{y} \iff \vec{y} \perp \vec{x})$$

C-B. 不等式 $|\underbrace{(\vec{x}|\vec{y})}_{\text{内积的模长}}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$

三角不等式 $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

勾股定理 如 $\vec{x} \perp \vec{y}$, 则

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

设 $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$. 如 $\|\vec{v}\| = 1$
则称 \vec{v} 是单位向量

单位化. $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, $\vec{v} \in V \setminus \{0\}$

引理 设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 是两两正交
- 小右左基 则 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 线性无关

的非零向量. 则 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 线性无关

例: ① n 标准 U -空间
标准基 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是两两
正交的单位向量

$$n=1 \quad \text{①}$$
$$x = x_1 + x_2 \sqrt{-1}, \quad y = y_1 + y_2 \sqrt{-1}$$
$$(x|y) = x \bar{y} = (x_1 + x_2 \sqrt{-1})(y_1 - y_2 \sqrt{-1})$$
$$(x|x) = x \bar{x} = x_1^2 + x_2^2$$

§10.4 单位正交基

设 $n = \dim(V)$, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in V$
两两正交的单位向量. 则称
 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组
单位正交基

定理. (Gram-Schmidt 正交化)

设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ 线性无关

则 \exists 两两正交的单位向量

$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ 使得

$$\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle = \langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k \rangle$$

$i=1, 2, \dots, k$

特别地 V 有单位正交基

命题: 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \stackrel{V}{\text{是}}$

的 单位正交基.

$$\vec{x} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } (\vec{x} | \vec{y}) = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

在欧氏空间中

$$-1 \leq \frac{(\vec{x} | \vec{y})}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \leq 1$$

§10.5 正交补

设 $S, T \subset V$. 则

$$\forall \vec{x} \in S, \vec{y} \in T$$

$\vec{x} \perp \vec{y}$. 则记 $S \perp T$
特别地. 如果 $S \perp T$. 且 $S = \{\vec{x}\}$
则记 $\vec{x} \perp T$

设 U 是子空间

$$U^\perp = \{\vec{x} \in V \mid \vec{x} \perp U\}$$

称为 U 的正交补

命题: 设 $U \subset V$ 子空间

(i) U^\perp 是子空间

(ii) $V = U \oplus U^\perp$

(iii) $(U^\perp)^\perp = U$

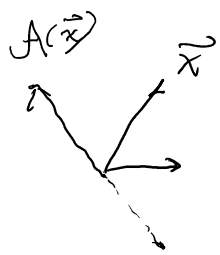
证明: 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in V$ 是组
两两正交的单位向量, 则

$$\exists \vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_n \in V$$

使得 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_n$

是 V 的单位正交基

例 设 U 是 V 的子空间



π_U 是从 V 到 V 关于

$$V = U \oplus U^\perp$$

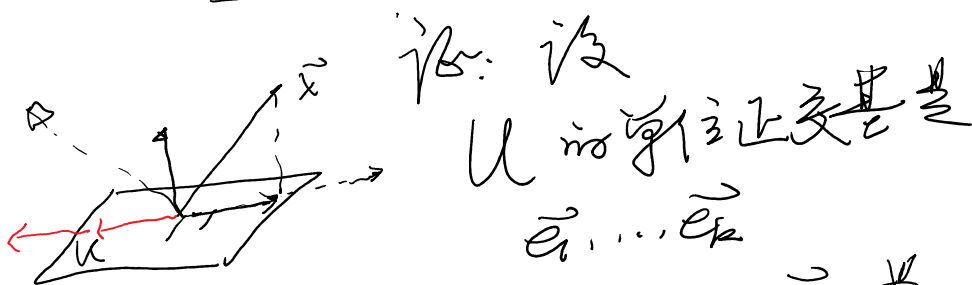
到 U 的投影

设 $A = E - 2\pi_U$

证: (i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$
 $(A\vec{x} | A\vec{y}) = (\vec{x} | \vec{y})$

(ii) $A^2 = E$

(iii) $\det(A)$



证: 设 U 的单位正交基是 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$

设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的单位正交基

$\forall j \in \{k+1, \dots, n\}, \vec{e}_j \perp \vec{e}_i$

$\vec{e}_j \perp \vec{e}_k$

$\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n \in U^\perp$

§10.6 U-矩阵

设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n; \vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ 是

V 两组单位正交基

设 $P \in GL_n(\mathbb{C})$ 使得

$$(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) P$$

$$\delta_{ij} = (\vec{\varepsilon}_i | \vec{\varepsilon}_j)$$

$$= ((\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \vec{P}^{(i)} | (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \vec{P}^{(j)})$$

$$= (\vec{P}^{(i)})^t \overline{\vec{P}^{(j)}}$$

$$= \boxed{(\vec{P}^{(i)})^t | \vec{P}^{(j)}} \quad (\because \delta_{ij} \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow P^* P = E$$

定义: 设 $P \in GL_n(\mathbb{C})$

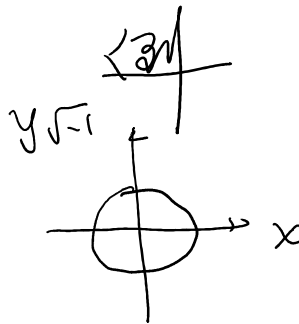
如果 $P^* = P^{-1}$, 则

称 P 是 U-矩阵

(unitary matrix)

$$|z|=1 \Leftrightarrow \bar{z}z=1.$$

$n=1$ $z = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$
 $\theta \in [0, 2\pi)$



$n=2$ $A \in M_2(\mathbb{C})$, U -矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \varepsilon\beta & \varepsilon\alpha \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha, \beta, \varepsilon \in \mathbb{C}$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad |\varepsilon| = 1$$

命题.

(i) 令 $U_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ 是 } U\text{-矩阵}\}$

则 $U_n(\mathbb{C})$ 是 $GL_n(\mathbb{C})$ 的子群

(ii) 设 A 是 U -矩阵. 则

$$|\det A| = 1$$

↓
模长

(iii) A 是 U -矩阵

$\Leftrightarrow \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}$ 是标准
 U -空间的单位正交基

定义. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$

如果存在 U -矩阵 P , 使得
 $B = P^T A P (= P^* A P)$

则称 B 与 A 是 U -相似的.
记为 $B \sim_u A$
" \sim_u " 是等价关系.

" \sim_u " \implies " \sim_s "

如果 $A \sim_u B$ 且

A (斜) Hermitian $\iff B$ 也是

A 是 U -矩阵 $\iff B$ 也是

问题: 如何在 \sim_u 下

$M_n(\mathbb{C})$ 分类.

\triangleright ① Gram-Schmidt 正交化

\triangleright ② 计算 正交补

给定 W , 求 W^\perp

§11 正规矩阵和正规算子

§11.1 基本定义

定义: 设 $A \in L(V)$ 如果 $\exists B \in L(V)$
使得 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$

$$(A\vec{x} | \vec{y}) = (\vec{x} | B\vec{y})$$

则称 B 是 A 的伴随算子

命题: 设 $A \in L(V)$ 则
 A 的伴随算子 A^* 存在
且唯一.

如果 A 在 V 的某组
单位正交基下的矩阵是 A
则 A^* 在同样基底下的
矩阵是 A^* .

定义: 设 $A \in L(V)$
如果 $AA^* = A^*A$, 则称

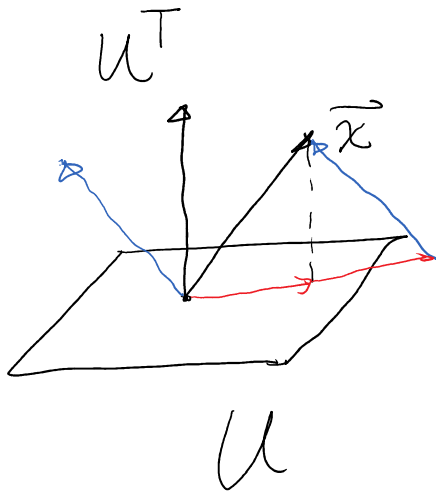
A 是正规的

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$

如果 $A^*A = AA^*$ 则
称 A 是正规的

注. 设 $A \in L(V)$ 在 V 的
某组单位正交基下的矩阵是 A

则 A 正规 $\Leftrightarrow A$ 正规



例 Hermitian, 即 Hermitian
 U -矩阵是正规矩阵

定义: $A \in L(V)$

如果 $A = A^*$ 则称 A 是 Hermitian 的
 $A = -A^*$... A 是斜的 ...

命题: 设 $A \in \mathcal{L}(V)$
 则以下四个条件等价

(i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$
 $(A\vec{x} | A\vec{y}) = (\vec{x} | \vec{y})$

(ii) A 在 V 的任一单位正交基
 下的矩阵是 U -矩阵

(iii) $\forall \vec{x} \in V, \|\vec{x}\| = \|A\vec{x}\|$

(iv) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$
 $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|A\vec{x} - A\vec{y}\|$

满足上述四个条件之一的
 算子称为 U -算子

设 $A \in \mathcal{L}(V), A$ 在 V
 的某组单位正交基下的矩阵是 A

则 A 是 $\begin{cases} \text{Hermitian} \\ \text{斜 " } \\ \text{U-算子} \end{cases} \iff \begin{cases} A \text{ Hermitian} \\ \text{斜 Hermitian} \\ \text{U-矩阵} \end{cases}$

§11.2 基引理

引理 4. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$\text{tr}(A^*A) = 0 \Rightarrow A = 0$$

证: 设 $A = (a_{ij})$ 则

$$A^* = (\overline{a_{ji}})$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^*A) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_{ji}} a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{tr}(A^*A) = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}$$

引理 2 设 $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$
正定, 则 $C = 0$.

引理 3 设 $A \in \mathcal{L}(V)$ 正定

$W \subset V$ 是 A -不变的
则 W^\perp 也是 A -不变的

引理 4 设 $A \in \mathcal{L}(V)$

则 A 有 $\frac{1}{0}$ 维不变子空间

§11.3 U -相似标准型

定理 设 $A \in \mathcal{L}(V)$ 正规
 则 $V = \underbrace{W_1}_{\perp} \oplus \dots \oplus \underbrace{W_n}_{\perp}$
 其中 W_1, \dots, W_n 是两两
 正交的 n -维不变子空间

定理 设 $A \in \mathcal{L}(V)$ 正规
 则 $\exists V$ 的一组标准正交基
 使得 A 在该基下的
 矩阵是

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

定理 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 正规
 则 A U -相似于一个对角阵

特殊情形

对称 \rightarrow (i) 如果 A 是 Hermitian, \forall
 $A \sim U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$
 (ii) 如果 A 是斜 Hermitian \forall
 $A \sim U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \{i\alpha, -i\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

(iii) 如 A 是 U -矩阵
 则 $A \sim U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
 其中 $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1$
 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^* \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = E$
 $\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \bar{\lambda}_n \lambda_n \end{pmatrix} = E \Rightarrow \bar{\lambda}_i \lambda_i = 1$
 $\Rightarrow |\lambda_i| = 1$

$z^2 + 1 = 0$
 $\mathbb{C} = \{x + y\sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
 \Downarrow
FTA

§12 半正定算子

定义: 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, Hermitian
 如 $\forall \vec{x} \in V$ 有
 $(A\vec{x} | \vec{x})$ 是非负实数. 则称
 A 是 半正定算子

正定

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 如 \rightarrow Hermitian

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$$

$\vec{x}^* A \vec{x} \geq 0$ 则称 A 半正定
 > 0 正定

命题: 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, Hermitian
 A 是 V 在 V 的某组单位正交
 基下的矩阵, 则

A 半正定 $\Leftrightarrow A$ 非负定
 (正定) (正定)

定理: $A \in M_n(\mathbb{C})$ 半正定 (正定)
 $\Leftrightarrow A$ 的所有特征值非负 (正)

平方根定理

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 半正定
 则 $\exists!$ $S \in M_n(\mathbb{C})$ 半正定
 使得 $A = S^2$

极分解

设 $A \in GL_n(\mathbb{C})$.
 则 $\exists!$ 正定矩阵 S 和
 U -矩阵 T 使得

$$A = ST.$$

目

1. 核像分解不考
2. 循环空间考的很少

$\overline{M.A.V}$

2. 114-115-116-117-118-119-120-121-122-123-124-125-126-127-128-129-130-131-132-133-134-135-136-137-138-139-140-141-142-143-144-145-146-147-148-149-150-151-152-153-154-155-156-157-158-159-160-161-162-163-164-165-166-167-168-169-170-171-172-173-174-175-176-177-178-179-180-181-182-183-184-185-186-187-188-189-190-191-192-193-194-195-196-197-198-199-200-201-202-203-204-205-206-207-208-209-210-211-212-213-214-215-216-217-218-219-220-221-222-223-224-225-226-227-228-229-230-231-232-233-234-235-236-237-238-239-240-241-242-243-244-245-246-247-248-249-250-251-252-253-254-255-256-257-258-259-260-261-262-263-264-265-266-267-268-269-270-271-272-273-274-275-276-277-278-279-280-281-282-283-284-285-286-287-288-289-290-291-292-293-294-295-296-297-298-299-300-301-302-303-304-305-306-307-308-309-310-311-312-313-314-315-316-317-318-319-320-321-322-323-324-325-326-327-328-329-330-331-332-333-334-335-336-337-338-339-340-341-342-343-344-345-346-347-348-349-350-351-352-353-354-355-356-357-358-359-360-361-362-363-364-365-366-367-368-369-370-371-372-373-374-375-376-377-378-379-380-381-382-383-384-385-386-387-388-389-390-391-392-393-394-395-396-397-398-399-400-401-402-403-404-405-406-407-408-409-410-411-412-413-414-415-416-417-418-419-420-421-422-423-424-425-426-427-428-429-430-431-432-433-434-435-436-437-438-439-440-441-442-443-444-445-446-447-448-449-450-451-452-453-454-455-456-457-458-459-460-461-462-463-464-465-466-467-468-469-470-471-472-473-474-475-476-477-478-479-480-481-482-483-484-485-486-487-488-489-490-491-492-493-494-495-496-497-498-499-500-501-502-503-504-505-506-507-508-509-510-511-512-513-514-515-516-517-518-519-520-521-522-523-524-525-526-527-528-529-530-531-532-533-534-535-536-537-538-539-540-541-542-543-544-545-546-547-548-549-550-551-552-553-554-555-556-557-558-559-560-561-562-563-564-565-566-567-568-569-570-571-572-573-574-575-576-577-578-579-580-581-582-583-584-585-586-587-588-589-590-591-592-593-594-595-596-597-598-599-600-601-602-603-604-605-606-607-608-609-610-611-612-613-614-615-616-617-618-619-620-621-622-623-624-625-626-627-628-629-630-631-632-633-634-635-636-637-638-639-640-641-642-643-644-645-646-647-648-649-650-651-652-653-654-655-656-657-658-659-660-661-662-663-664-665-666-667-668-669-670-671-672-673-674-675-676-677-678-679-680-681-682-683-684-685-686-687-688-689-690-691-692-693-694-695-696-697-698-699-700-701-702-703-704-705-706-707-708-709-710-711-712-713-714-715-716-717-718-719-720-721-722-723-724-725-726-727-728-729-730-731-732-733-734-735-736-737-738-739-740-741-742-743-744-745-746-747-748-749-750-751-752-753-754-755-756-757-758-759-760-761-762-763-764-765-766-767-768-769-770-771-772-773-774-775-776-777-778-779-780-781-782-783-784-785-786-787-788-789-790-791-792-793-794-795-796-797-798-799-800-801-802-803-804-805-806-807-808-809-810-811-812-813-814-815-816-817-818-819-820-821-822-823-824-825-826-827-828-829-830-831-832-833-834-835-836-837-838-839-840-841-842-843-844-845-846-847-848-849-850-851-852-853-854-855-856-857-858-859-860-861-862-863-864-865-866-867-868-869-870-871-872-873-874-875-876-877-878-879-880-881-882-883-884-885-886-887-888-889-890-891-892-893-894-895-896-897-898-899-900-901-902-903-904-905-906-907-908-909-910-911-912-913-914-915-916-917-918-919-920-921-922-923-924-925-926-927-928-929-930-931-932-933-934-935-936-937-938-939-940-941-942-943-944-945-946-947-948-949-950-951-952-953-954-955-956-957-958-959-960-961-962-963-964-965-966-967-968-969-970-971-972-973-974-975-976-977-978-979-980-981-982-983-984-985-986-987-988-989-990-991-992-993-994-995-996-997-998-999-1000

$\sqrt{A_{10}}$

3. 各种空间分解

又

- ① 循环子空间分解
- ② 不可分子空间分解
(不考)
- ③ 相似判别法