U-空间简介

2022年6月22日 6:39

回忆：记号 $\underset{\sim}{V}$ 是 $\mathbb{C}$ 上有限维线性空间

$\underbrace{(\ |\ )}$ 是 V 上内积，

称 V 为 U-空间

定义：设 $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k \in V$

$$G(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k) = \left((\vec{v}_i | \vec{v}_j) \right)_{k\times k}$$

例 验证 $G(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k)$ 是 Hermitian

$$G(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n)^* = \overline{\left((\vec{v}_i | \vec{v}_j) \right)}$$

$$= \left(\underbrace{\overline{(\vec{v}_j | \vec{v}_i)}}_{\text{内积是 Hermitian}} \right) = \left((\vec{v}_i | \vec{v}_j) \right)$$

$$= G(\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n)$$

基本性质：设 $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$

$\vec{y} = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_k \vec{v}_k$

$$(\vec{x} | \vec{y}) = (\alpha_1 \dots \alpha_k)\, G(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k) \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_k} \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k$ 线性无关

$\iff \operatorname{rank}(G(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k)) = k$

§10.3 长度、距离和正交

设 $\vec{x} \in V$

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{(\vec{x}|\vec{x})}$$

设 $\vec{y} \in V$，从 $\vec{x}$ 到 $\vec{y}$ 的距离

是 $\|\vec{x}-\vec{y}\|$

如果 $(\vec{x}|\vec{y})=0$，则称 $\vec{x} \perp \vec{y}$

$(\vec{x} \perp \vec{y} \iff \vec{y} \perp \vec{x})$

C.-B. 不等式 $\underbrace{|(\vec{x}|\vec{y})|}_{\text{复数的模长}} \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$

三角不等式 $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

勾股定理 如果 $\vec{x} \perp \vec{y}$，则

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

设 $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$，如果 $\|\vec{v}\|=1$

则称 $\vec{v}$ 是单位向量

单位化 $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$，$\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$

引理 设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 是两两正交

的非零向量，则 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ 线性无关

的非零向量. 则 $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$ 线性无关

例: $\mathbb{C}^n$ 标准U-空间

标准基 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是两两正交的单位向量

$n=1$ $\mathbb{C}$

$x=x_1+x_2\sqrt{-1}$, $y=y_1+y_2\sqrt{-1}$

$(x|y)=x\bar{y}=(x_1+x_2\sqrt{-1})(y_1-y_2\sqrt{-1})$

$(x|x)=x\bar{x}=x_1^2+x_2^2$

§10.4 单位正交基

设 $n=\dim(V)$, $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是V中两两正交的单位向量. 则称 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是V的一组单位正交基

定理. (Gram-Schmidt正交化)

设 $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\in V$ 线性无关

则∃两两正交的单位向量

$\vec{\varepsilon_1}, \ldots \vec{\varepsilon_i}$ 使得

$$\langle \vec{v_1}, \ldots \vec{v_i} \rangle = \langle \vec{\varepsilon_1}, \ldots \vec{\varepsilon_i} \rangle$$

$i = 1, 2 \ldots k$

特别地 V 有单位正交基

命题：设 $\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}$ 是 V

的单位正交基

$$\vec{x} = (\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = (\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

则 $(\vec{x} | \vec{y}) = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n}$

在欧氏空间中

$$-1 \leq \frac{"(\vec{x} | \vec{y})"}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \leq 1$$

?　?

---

§10.5 正交补

设 $S, T \subset V$. 如果

$\forall \vec{x} \in S, \vec{y} \in T$

$\vec{x}\perp\vec{y}$. 则记 $S\perp T$

特别地. 如果 $S\perp T$. 且 $S=\{\vec{x}\}$

则记 $\vec{x}\perp T$

设 U 是子空间

$U^{\perp}=\{\vec{x}\in V \mid \vec{x}\perp U\}$

称为 U 的正交补

命题: 设 $U\subset V$ 子空间

(i) $U^{\perp}$ 是子空间

(ii) $V=U\oplus U^{\perp}$

(iii) $(U^{\perp})^{\perp}=U$

引理: 设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_k}\in V$ 是组

~~两两~~ 正交的单位向量, 则

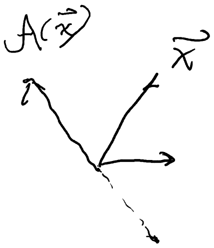
$\exists\ \vec{e_{k+1}},\dots\vec{e_n}\in V$

使得 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_k},\vec{e_{k+1}},\dots\vec{e_n}$

是 V 的单位正交基

例　设 U 是 V 的子空间

π_U 是从 V 到 V 关于



$$V = U \oplus U^{\perp}$$

到 U 的投影

设 $\boxed{A = \mathcal{E} - 2\pi_U}$

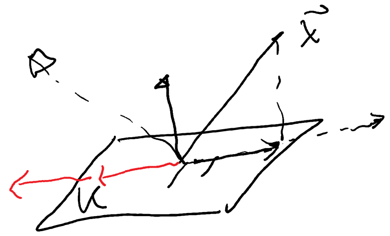
证明：(i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$

$(A(\vec{x}) \mid A(\vec{y})) = (\vec{x} \mid \vec{y})$

(ii) $A^2 = \mathcal{E}$

(iii) $\det(A)$

证：设



U 的单位正交基是

$\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}$

设 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}, \vec{e_{k+1}}, \dots \vec{e_n}$ 是

V 的单位正交基

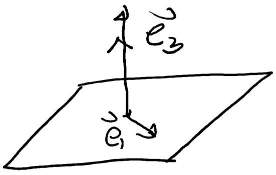
$\because \forall j \in \{k+1, \dots n\}$. $\vec{e_j} \perp \vec{e_1}$

$\dots$ $\vec{e_j} \perp \vec{e_k}$

$\therefore \vec{e_{k+1}}, \dots \vec{e_n} \in U^{\perp}$

于是 $\Pi_U(\vec{e_i}) = \vec{e_i}$, $i=1,2\cdots k$

$\Pi_U(\vec{e_j}) = \vec{0}$, $j=k+1,\cdots n$



$\Rightarrow \Pi_U$ 在 $\vec{e_1}\cdots\vec{e_n}$ 下矩阵是

$$B=\begin{pmatrix} \underbrace{1 & & }_{k} & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$\mathcal{E}-2\Pi_U$ 在 $\vec{e_1},\cdots\vec{e_n}$ 的矩阵是

$$E-2B=\begin{pmatrix} \underbrace{-1 & & }_{k} & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(i) $(\mathcal{A}\vec{x} \mid \mathcal{A}\vec{y}) = (-x_1\vec{e_1}-\cdots-x_k\vec{e_k}+x_{k+1}\vec{e_{k+1}}+\cdots+x_n\vec{e_n} \mid -y_1\vec{e_1}\cdots-y_k\vec{e_k}+y_{k+1}\vec{e_{k+1}}+\cdots+y_n\vec{e_n})$

$=(-x_1)(\overline{-y_1})+\cdots+(-x_k)(\overline{-y_k})+x_{k+1}\overline{y_{k+1}}+\cdots+x_n\overline{y_n}$

$=x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n}=(\vec{x}\mid\vec{y})$

$(E-2B)^2=E \Rightarrow \mathcal{A}^2=\mathcal{E}$

$\det(E-2B)=\det(\mathcal{A})$

$\quad\ \| $

$(-1)^k$ $\quad\quad\quad\quad \square$

§10.6 U-矩阵

设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$; $\vec{\varepsilon_1},\dots\vec{\varepsilon_n}$ 是

V 两组单位正交基

设 $P\in GL_n(\mathbb{C})$ 使得

$\underline{(\vec{\varepsilon_1},\dots\vec{\varepsilon_n})}=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})P$

$$\delta_{ij}=(\vec{\varepsilon_i}|\vec{\varepsilon_j})$$

$$=\left((\vec{e_1},\dots\vec{e_n})\vec{P^{(i)}} \,\middle|\, (\vec{e_1},\dots\vec{e_n})\vec{P^{(j)}}\right)$$

$$=\left(\vec{P^{(i)}}\right)^t\overline{\vec{P^{(j)}}}$$

$$=\boxed{\overline{\left(\vec{P^{(i)}}\right)^t}\,\vec{P^{(j)}}}\quad(\because\delta_{ij}\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\quad P^*P=E$$

定义：设 $P\in GL_n(\mathbb{C})$

如果 $P^*=P^{-1}$，则

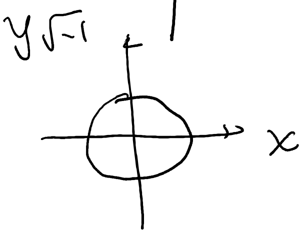
称 P 是 U-矩阵

(unitary matrix)

$|z|=1 \iff \bar{z}z=1$.

例 $n=1$. $z=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$

$\theta\in[0,2\pi)$



$n=2$ $A\in M_2(\mathbb{C})$, U-矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \varepsilon\bar{\beta} & \varepsilon\bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha,\beta,\varepsilon\in\mathbb{C}$

$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$, $|\varepsilon|=1$

命题.

(i) 令 $U_n(\mathbb{C})=\{A\in GL_n(\mathbb{C})\mid A$是U-矩阵$\}$

则 $U_n(\mathbb{C})$是$GL_n(\mathbb{C})$的子群

(ii) 设A是U-矩阵. 则

$|\det(A)|=1$

模长

(iii) A是U-矩阵

$\iff \vec{A}^{(1)},\dots\vec{A}^{(n)}$是标准

U-空间的单位正交基

定义. 设 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$

如果存在 U-矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP \ (= P^{*}AP)$$

则称 B 与 A 是 U-相似的，记为 $B \sim_U A$

"$\sim_U$" 是等价关系.

"$\sim_U$" $\Longrightarrow$ "$\sim_S$"

如果 $A \sim_U B$ 则

A (斜) Hermitian $\Longleftrightarrow$ B 也是

A 是 U-矩阵 $\Longleftrightarrow$ B 也是

问题：如何在 $\sim_U$ 下对 $M_n(\mathbb{C})$ 分类.

▷ ① Gram-Schmidt 正交化

▷ ② 计算正交补

给定 W，求 $W^{\perp}$

---

§11 正规矩阵和正规算子

§11.1 基本定义

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，如果 $\exists \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$

使得 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$

$$(\mathcal{A}(\vec{x}) \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid \mathcal{B}(\vec{y}))$$

则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 伴随算子

命题：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 则

$\mathcal{A}$ 的伴随算子 $\mathcal{A}^*$ 存在

且唯一.

如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的基组

单位正交基下的矩阵是 A

则 $\mathcal{A}^*$ 在同样基底下

的矩阵是 A^*.

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

如果 $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$，则称

$\mathcal{A}$ 是正规的

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$

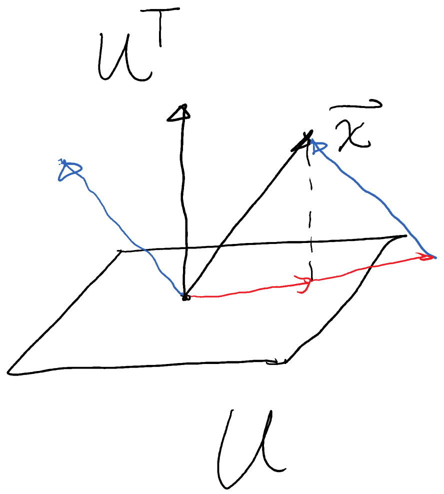
如果 $A^*A = AA^*$. 则

称 A 是正规的

注. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 在 V 的

~~基组~~单位正交基下的矩阵是 A

$\boxed{\text{则 } \mathcal{A} \text{ 正规} \Longleftrightarrow A \text{ 正规}}$



例 Hermitian, 斜 Hermitian

U-矩阵 是 正规矩阵

定义: $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

如果 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ 则称 $\mathcal{A}$ 是Hermitian的

$A = -A^*$ $\cdots$ $\mathcal{A}$是斜 $\cdots$

命题：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$

则以下四个断言等价

(i) $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$(\mathcal{A}(\vec{x})|\mathcal{A}(\vec{y}))=(\vec{x}|\vec{y})$

(ii) $\mathcal{A}$ 在 V 的任一标准正交基下的矩阵是 U-矩阵

(iii) $\forall \vec{x}\in V$，$\|\vec{x}\|=\|\mathcal{A}(\vec{x})\|$

(iv) $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$\|\vec{x}-\vec{y}\|=\|\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y})\|$

满足上述四个等价条件之一的算子称为 U-算子

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\mathcal{A}$ 在 V 的某组标准正交基下的矩阵是 A

$$\text{则 } \mathcal{A} \text{ 是} \begin{cases} \text{Hermitian} \\ \text{斜 〃} \\ U\text{-算子} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A\ \text{Hermitian} \\ \text{斜 Hermitian} \\ U\text{-矩阵} \end{cases}$$

---

§11.2 基本引理

引理4. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$

$$\mathrm{tr}(A^*A)=0 \Rightarrow A=O$$

证：设 $A=(a_{ij})$ 则

$$A^*=(\overline{a_{ji}})$$

$$\mathrm{tr}(A^*A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}}\,a_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}(A^*A)=0 \Leftrightarrow a_{ij}=0$$

$(i,j\in\{1,2,\cdots,n\})$

引理2 设 $\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$ 正规，则 $C=O$.

引理3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规 $W\subset V$ 是 $\mathcal{A}$-不变的 则 $W^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$-不变的

引理4 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 则 $\mathcal{A}$ 有 $\underline{1}$ 维不变子空间

§11.3 U-相似标准型

定理 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规

则 $V = \underbrace{W_1}_{1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{W_n}_{1}$

其中 $W_1, \ldots, W_n$ 是两两正交的一维不变子空间

定理 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规

则 $\exists$ V 的一组单位正交基

使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

定理 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 正规

则 A U-相似于一个对角阵

特殊情形

(i) 如果 A 是 Hermitian，则

对称 $\longrightarrow$ $A \sim_U \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$，

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

(ii) 如果 A 是斜 Hermitian 则

$A \sim_U \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \{\alpha\sqrt{-1} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

(iii) 如果 A 是 U-矩阵

则 $A \sim_U \mathrm{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$

其中 $|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_n| = 1$

$\mathrm{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^* \ \mathrm{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = E$

$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n\lambda_n \end{pmatrix} = E \Rightarrow \bar{\lambda}_i\lambda_i = 1, \ i = 1 \cdots n \Rightarrow |\lambda_i| = 1.$

$z^2+1=0$ $\quad \mathbb{C} = \{x + y\sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$\Downarrow$

FTA

§12 半正定算子

定义：设 $A \in \mathcal{L}(V)$，Hermitian

如果 $\forall \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}$

$(A(\vec{x}) \mid \vec{x})$ 是非负实数（正实数），则称

A 是半正定算子（正定）

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ Hermitian 如果

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$\bar{\vec{x}}^t A \vec{x} \geq 0$ （> 0） 则称 A 半正定（正定）

命题：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，Hermitian

A 是 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵，则

$\mathcal{A}$ 半正定（正定）$\iff$ A 半正定（正定）

定理：$A \in M_n(\mathbb{C})$ 半正定（正定）

$\iff$ A 的所有特征根非负（正）

半方根定理

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 半正定

则 $\exists!$ $S \in M_n(\mathbb{C})$ 半正定

使得 $A = S^2$

极化分解

设 $A \in GL_n(\mathbb{C})$，

则 $\exists!$ 正定矩阵 S 和

U-矩阵 T 使得

$A = ST$.

1. 核像分解 不考
2. 循环空间考的很少

$[V_{A,v}]$

2. 临……

$\boxed{\mu_{A,V}}$

3. 各种空间分解

又
① 循环子空间分解
② 不可分子空间分解（不是门考）
③ 相似判别法