极化公式与U-空间简介

2022年6月20日 7:02

回忆：设V是欧氏空间

§9 半正定算子

§9.1 定义

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 对称，如果

$\forall\ \vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}$

$$(\mathcal{A}(\vec{x})\mid\vec{x})\geq 0\quad(>0)$$

则称 $\mathcal{A}$ 是半正定（正定）算子

命题：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 对称

则 $\mathcal{A}$ 是半正定（正定）

$\Longleftrightarrow$ 在V任一单位正交基下的矩阵是半正定（正定）

证：设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是V一组单位正交基，$\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是A

设 $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n=(\vec{e}_1\cdots\vec{e}_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

则 $\mathcal{A}(\vec{x})=(\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

则 $\mathcal{A}(\vec{x}) = (\vec{e_1}, \cdots \vec{e_n}) A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$

$\because \vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ 是单位正交基

$\therefore (\mathcal{A}(\vec{x}) | \vec{x}) = \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$= (x_1, \cdots x_n) A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$= (x_1 \cdots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\underbrace{(\mathcal{A}(\vec{x}) | x) \geqslant 0}_{>0} \Longleftrightarrow \underbrace{(x_1 \cdots x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \geqslant 0}_{>0}$

于是 $\mathcal{A}$ 半正定（正定）

$\Longleftrightarrow$ A 半正定（正定）

§9.2 平方根

<u>平方根定理</u> 设 $\mathcal{A}$ 是半正定~~算子~~

则 $\exists!$ 半正定~~算子~~ S 使得

$\mathcal{A} = S^2$ 且 $S \in \mathbb{R}[\mathcal{A}]$

<u>证：</u> 因为 $\mathcal{A}$ 半正定，所以 $\mathcal{A}$ 对称

上述分组

于是 A 可对角化，由[illegible]

定理（见习题课）存在

$\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$，两两不同

和完全正交幂等组

$\pi_1, \dots \pi_k$ 使得

$$\boxed{A = \lambda_1 \pi_1 + \dots + \lambda_k \pi_k}$$

且 $\lambda_1, \dots \lambda_k$ 是 A 的全部特征根

令 $S = \sqrt{\lambda_1}\, \pi_1 + \dots + \sqrt{\lambda_k}\, \pi_k$

（$\because A$ 半正定 $\therefore \lambda_1 \geq 0, \dots \lambda_k \geq 0$）

$$S^2 = \left(\sqrt{\lambda_1}\, \pi_1 + \dots + \sqrt{\lambda_k}\, \pi_k\right)^2$$

利用正交性，$\pi_i \pi_j = 0$．$(i \neq j)$

幂等性，$\pi_i^2 = \pi_i$

可知

$$S^2 = \lambda_1 \pi_1 + \dots + \lambda_k \pi_k = A$$

故所求平方根存在

$\left(\sqrt{\lambda_1}\, \pi_1 + \dots + \sqrt{\lambda_k}\, \pi_k\right)^2$

$$(\sqrt{\lambda_1}\pi_1 + \sqrt{\lambda_2}\pi_2)^2$$
$$= (\sqrt{\lambda_1}\pi_1 + \sqrt{\lambda_2}\pi_2)(\sqrt{\lambda_1}\pi_1 + \sqrt{\lambda_2}\pi_2)$$
$$= \lambda_1 \underline{\pi_1^2} + \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\underline{\pi_2\pi_1} + \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}\underline{\pi_1\pi_2} + \lambda_2\underline{\pi_2^2}$$
$$= \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2$$

$$A = P^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

$$S = P^t \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P$$

$$S^2 = A$$

由谱分解定理

$$\pi_1, \dots, \pi_k \in \mathbb{R}[A]$$

$\because S = \sqrt{\lambda_1}\pi_1 + \dots + \sqrt{\lambda_k}\pi_k$

$\therefore S \in \mathbb{R}[A]$

下面证明唯一性

再设 半正定算子 B 满足

$$A = B^2$$

$\because B$ 对称 $\therefore$

$$B=\alpha_1\sigma_1+\cdots+\alpha_m\sigma_m$$

其中 $\alpha_1,\ldots\alpha_m\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

两两不同 $\sigma_1\ldots\sigma_m$ 是完全正交

幂等组（谱分解定理）

$$A=B^2=(\alpha_1\sigma_1+\cdots+\alpha_m\sigma_m)^2$$

$$=\alpha_1^2\sigma_1+\cdots+\alpha_m^2\sigma_m$$

由谱分解的唯一性可知. $k=n$

且适当调整下标后有

$$\alpha_1^2=\lambda_1,\quad \sigma_1=\pi_1$$

$$\vdots$$

$$\alpha_k^2=\lambda_k\quad \sigma_k=\pi_k$$

$\because \alpha_1\cdots\alpha_k$ 都非负

$\therefore \alpha_1=\sqrt{\lambda_1},\quad\ldots\quad\alpha_k=\sqrt{\lambda_k}$

$\Rightarrow B=S$ $\boxed{}$

推论（平方根定理之矩阵版）

设 $A \in SM_n(\mathbb{R})$ 半正定

则 $\exists!$ 半正定矩阵 使得

$A = S^2$ 且 $S \in \mathbb{R}[A]$.

证: 设 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\vec{x}$

其中 $\mathbb{R}^n$ 是标准欧氏空间

$\because$ 标准基是单位正交基

$\therefore$ A 对称 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ 对称

A 半正定 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ 半正定

由平方根定理 $\exists!$ 对称半正定 $\mathcal{S}$

使得 $\mathcal{A} = \mathcal{S}^2$ 且 $\mathcal{S} = \mathbb{R}[\mathcal{A}]$

设 S 是 标准基下 $\mathcal{S}$ 的矩阵

则 S 即为所求 □

例 设 $A, B \in SM_n(\mathbb{R})$ 且 A 正定

证明 AB 的特征根都是实数

证: 由平方根定理, 存在正定

一矩阵 C 使得

$$A = C^2$$

$$AB = C^2 B$$
$$= \underbrace{C C^{-1} C^2 B C C^{-1}}_{\text{magic trick}}$$
$$= C\, CBC\, C^{-1}$$

于是 $AB \sim_s CBC$

$$(CBC)^t = C^t B^t C^t$$
$$= CBC$$

$\Longrightarrow$ CBC 对称

于是 CBC 的所有特征根都是实数

$\Longrightarrow$ AB 的所有 …… 同

回42 ① 设 $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$

证明 $AB \sim_s BA$

$$AB = ABAA^{-1} = A(BA)A^{-1}$$

$$AB \sim_s BA$$

② 设 $A, B \in SM_n(\mathbb{R})$ 正定

则 AB 相似于一个正定矩阵

设 $A = P^tP$, $B = Q^tQ$

其中 $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$

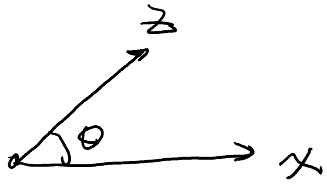
$$AB = P^tPQ^tQ \sim_s QP^tPQ^tQQ^{-1}$$

$$= QP^tPQ^t$$

$$= (PQ^t)^t(PQ^t) \text{ 正定}$$

§10.3 极化分解

(Polarization)



极化分解定理

设 $A \in GL_n(\mathbb{R})$

则存在唯一正定矩阵 S

和正交矩阵 T 使得

$$A = \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{T}$$

证：$\because A$ 可逆 $\therefore AA^t$ 正定

由平方根定理 $AA^t = S^2$

其中 S 正定

令 $T = S^{-1}A$. 验证 T 正交

$$\underset{\sim}{T^t T} = (S^{-1}A)^t(S^{-1}A)$$

$$= A^t (S^{-1})^t \underset{\sim}{S^{-1}} A$$

$$= A^t S^{-1} S^{-1} A$$

$$= A^t (S^2)^{-1} A$$

$$= A^t (AA^t)^{-1} A$$

$$= A^t (A^t)^{-1} A^{-1} A = \underline{E}$$

$\Rightarrow T$ 正交.

极化分解存在

唯一性. 再证

$$A = S'T'$$

其中 S' 正定，T' 正交

$$AA^t = S'T'(S'T')^t$$
$$= S'\underline{T'(T')^t}S'^t$$
$$= S'S'^t$$
$$= S'^2$$

$\because \underbrace{AA^t}= S^2$

由平方根的唯一性 $S = S'$

$A = \underset{\sim}{S}T = ST'$

$\because S$ 可逆 $\therefore T = T'$ □

注：设 $A = ST$，S 正定，T 正交

则 $\underbrace{S^2 = AA^t}$

注 利用矩阵转置可知

如果 $A \in GL_n(\mathbb{R})$，则只存在

正定矩阵 M，正交矩阵 N

使得 $A = NM$

推论 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 可逆

则 $\exists!$ 正定算子 $\mathcal{S}$ 和正交算子 $\mathcal{T}$

使得 $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{T}$. 　□

例 设 $A \in GL_n(\mathbb{R})$,

$$A = \underset{\text{正定}}{S}\ \underset{\text{正交}}{T}$$

证明: A 正定 $\Longleftrightarrow ST = TS$

证: "$\Leftarrow$" $AA^t = ST(ST)^t$

$$= S\underline{TT^t}S^t = SS^t = S^2$$

$$A^tA = (ST)^tST$$

$$= T^tS^tST$$

$$= T^tS^2T = \underline{T^tT}S^2$$

$$= S^2$$

$AA^t = A^tA$. A 正规

"$\Longrightarrow$" 设 A 正规

$$\underbrace{A^t A}_{T^t S^t S T} = \underbrace{A A^t}_{S^2}$$

$$T^t \underbrace{S^t S}\, T = S^2$$

$$T^t S^2 T = S^2$$

∴ $\boxed{S^2 T = T S^2}$

T 与 $S^2 = \underline{AA^t}$ 交换

∵ $S = \sqrt{AA^t}$ ∴ $S \in \mathbb{R}[AA^t]$
(平方根定理)

∴ T 与 S 交换 □

思考题: 设 $A, B \in SM_n(\mathbb{R})$
A 正定. 证明 AB 的特征根
都是实数.

[能否使用上周的知识证明之]

§10 U-空间 (酉空间)

$\underline{\mathbb{R}}$ $x, y \in \mathbb{R}$ $(x|y) = xy$
$(x|x) \geq 0$

$\mathbb{C}$ $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ $\sqrt{-1}\,\overline{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}(-\sqrt{-1})$

$\mathbb{C}$ $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$! $\sqrt{-1}\,\overline{\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}(-\sqrt{-1})=1$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$x_1^2+\cdots+x_k^2\geq 0$ 且 $x_1^2+\cdots+x_k^2=0$ $\Longleftrightarrow x_1=\cdots=x_k=0$	$\overline{}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ $x+y\sqrt{-1}\mapsto x-y\sqrt{-1}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ "$\overline{}$"域同构 设 $z\in\mathbb{C}$ 如果 $\bar{z}=z\Rightarrow z\in\mathbb{R}$ $\bar{z}=-z\Rightarrow z\in\{y\sqrt{-1}\mid y\in\mathbb{R}\}$ $\forall z_1,\ldots,z_k\in\mathbb{C}$ $z_1\bar{z}_1+\cdots+z_k\bar{z}_k\geq 0$ 且 $z_1\bar{z}_1+\cdots+z_k\bar{z}_k=0$ $\Longleftrightarrow z_1=\cdots=z_k=0$ $z=x+y\sqrt{-1}$ 复杂 $\bar{z}=x-y\sqrt{-1}$ $z\bar{z}=x^2+y^2$
$\mathbb{R}[t]\setminus\mathbb{R}$ 中不可约因子次数为 1 或 2	$\mathbb{C}[t]\setminus\mathbb{C}$ 中的不可约因子都是一次的 (FTA) 简单

记号 V 是 $\mathbb{C}$ 上有限维线性空间

§10.1 半双线性型

§10.1 半双线性型

定义：设 $f: V\times V \to \mathbb{C}$，如果

$\forall\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha f(\vec{x},\vec{z})+\beta f(\vec{y},\vec{z})$$

$$f(\vec{x}, \alpha\vec{y}+\beta\vec{z}) = \overline{\alpha} f(\vec{x},\vec{y})+\overline{\beta} f(\vec{x},\vec{z})$$

则称 f 是 V 上半双线性型

设 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 是 V 的一组基

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e_1}+\cdots+y_n\vec{e_n},\quad x_i, y_j \in \mathbb{C}$$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e_i}, \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e_j}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f\Big(\vec{e_i}, \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e_j}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j} f(\vec{e_i},\vec{e_j})$$

$$= \sum^{n} \sum^{n} x_i\overline{y_j} f(\vec{e_i},\vec{e_j})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} f(\vec{e_i}, \vec{e_j})$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \underbrace{\left(f(\vec{e_i}, \vec{e_j}) \right)_{n\times n}}_{A \in M_n(\mathbb{C})} \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

称 A 是 f 在 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 下的矩阵

f是共轭双线性型

定义：如果对任意 $\vec{x}, \vec{y} \in V$

$$f(\vec{y}, \vec{x}) = \overline{f(\vec{x}, \vec{y})}$$

则称 f 是 Hermitian 的

(Hermite)

定义：设 $A \in M_n(\mathbb{C})$，

$$A = (a_{ij})_{n\times n}$$

$$A^* = (\overline{a_{ij}})^t = (\overline{a_{ji}})_{n\times n}$$

称为 A 的共轭转置.

如果 $A = A^*$，则称

A 是 Hermitian

命题：设 f 是 V 上半双线性

$\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n$ 是 V 的一组基

$A = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j))_{n\times n}$

则 f 是 Hermitian

$\Longleftrightarrow A$ 是 Hermitian

证：见讲义.

注：设 f 是 Hermitian

则 $f(\vec{x}, \vec{x}) = \overline{f(\vec{x}, \vec{x})}$

$\Longrightarrow f(\vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{R}$

定义：设 f 是 Hermitian.

如果 $\forall \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}$,

$f(\vec{x}, \vec{x}) > 0$

则称 f 是正定的 Hermitian 半双线性型（简称 f 正定）

注 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

（自己证明）

定义：设 $A \in M_n(\mathbb{C})$

如果 $A = -A^*$，则

称 A 是斜 Hermitian

§10.2 U-空间

设 f 是 V 上正定的 Hermitian 半双线性型，则 (V, f) 称为一个 U-空间，f 称为 V 上的内积，

$$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \longrightarrow f(\vec{x}, \vec{y}) =: (\vec{x}|\vec{y}).$$

即 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$

半双线性:

$$(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y} \mid \vec{z}) = \alpha(\vec{x}\mid\vec{z}) + \beta(\vec{y}\mid\vec{z})$$

$$(\vec{x} \mid \alpha\vec{y}+\beta\vec{z}) = \bar{\alpha}(\vec{x}\mid\vec{y}) + \bar{\beta}(\vec{x}\mid\vec{z})$$

Hermitian

$$(\vec{y}\mid\vec{x}) = \overline{(\vec{x}\mid\vec{y})}$$

正定:

$$(\vec{x}\mid\vec{x}) \geqslant 0$$

且 $(\vec{x}\mid\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

定义: $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k \in V$

$$G(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k) = \left((\vec{v}_i \mid \vec{v}_j) \right)_{k\times k}$$

称 $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$ 的 Gram 矩阵.