第三章　内积空间

5.2　正规算子

定义 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是正规算子. 类似地, 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果 $AA^t = A^tA$, 则称 A 是正规矩阵.

例 5.4 证明正交矩阵是正规矩阵.

证明. 设 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 则 $P^tP = E = PP^t$. 故 P 是正规矩阵. □

命题 5.5 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则 $\mathcal{A}$ 正规当且仅当 A 正规.

证明. 根据上周讲义命题 5.2, $\mathcal{A}^*$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A^t. 由第二章第一讲定理 2.1, $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ 和 $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵分别是 AA^t 和 A^tA. 有矩阵表示的唯一性可知(见第二章第一讲第 1.1 节), $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 当且仅当 $AA^t = A^tA$. □

定义 5.6 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是对称算子. 如果 $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是斜对称算子.

对称和斜对称算子都是正规算子. 显然, 对称和斜对称矩阵都是正规矩阵.

命题 5.7 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则 $\mathcal{A}$ *(*斜*)*对称算子当且仅当 A *(*斜*)*对称矩阵.

证明. 根据上周讲义命题 5.2, $\mathcal{A}^*$ 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A^t. 于是, $\mathcal{A}^*{=}\mathcal{A}$ 当且仅当 $A^t{=}A$; $\mathcal{A}^*{=}-\mathcal{A}$ 当且仅当 $A^t{=}-A$; $\square$

定义 5.8 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 如果对于任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})=(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y})),$$

则称 $\mathcal{A}$ 是保内*(*积*)*的.

命题 5.9 设 $\mathcal{A}{\in}\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A. 则下列断言等价

(i) $\mathcal{A}$ 保内*;*

(ii) $A\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$*;*

(iii) 对任意 $\mathbf{x}\in V$, $\|\mathbf{x}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$ *(*保长*);*

(iv) 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})\|$ *(*保距*).*

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii). 对任意 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$,

$$\delta_{i,j}=(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j)=((\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\vec{A}^{(i)}|(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\vec{A}^{(j)})=(\vec{A}^{(i)})^t\vec{A}^{(j)}.$$

于是, $A^tA=E$. 即 $A\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 设 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$. 我们计算

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2=(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{x}))&=((\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}|(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix})\\ &=(x_1,\ldots,x_n)A^tA\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(x_1,\ldots,x_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\\ &=x_1^2+\cdots+x_n^2.\end{aligned}$$

于是, $\|\mathbf{x}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, 我们有

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})\|.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i) 对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, 我们有

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})\|\ \Rightarrow\ (\mathbf{x}-\mathbf{y}|\mathbf{x}-\mathbf{y})=(\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{y})).$$

于是,

$$\|\mathbf{x}\|^2-2(\mathbf{x}|\mathbf{y})+\|\mathbf{y}\|^2=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2-2(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y}))+\|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2.$$

注意到 $\|\mathbf{x}\|^2=\|\mathbf{x}-\mathbf{0}\|^2=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{0})\|^2=\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2$. 同理 $\|\mathbf{y}\|^2=\|\mathcal{A}(\mathbf{y})\|^2$. 由上式可得 $(\mathbf{x}|\mathbf{y})=(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathcal{A}(\mathbf{y}))$. □

注解 5.10 因为正交矩阵是正规矩阵*(见例 5.4)*, 所以保内算子是正规算子. 它也称为正交*(*保长、保距*)*算子.

例 5.11 设 $\mathbf{v} \in V$ 满足 $\|\mathbf{v}\| = 1$. 定义关于 $\mathbf{v}$ 的投映算子

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\colon V &\longrightarrow V \\ \mathbf{x} &\mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v}. \end{aligned}$$

证明*:* $\mathcal{A}$ 是对称算子.

证明. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v} \quad (\mathcal{A}\text{ 的定义}) \\ &= ((\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{y}|\mathbf{v}))\mathbf{v} \quad (\text{内积的双线性性}) \\ &= \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} + \beta(\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v} \quad (\text{数乘分配律}) \\ &= \alpha\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \beta\mathcal{A}(\mathbf{y}) \quad (\mathcal{A}\text{ 的定义}). \end{aligned}$$

故 $\mathcal{A}$ 是线性算子. 下面证明 $\mathcal{A}$ 对称.

(方法 1). 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则

$$(\mathbf{x}|\mathcal{A}(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}|(\mathbf{y}|\mathbf{v})(\mathbf{v})) = (\mathbf{y}|\mathbf{v})(\mathbf{x}|\mathbf{v}).$$

类似

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{v})(\mathbf{y}|\mathbf{v}).$$

故 $(\mathbf{x}|\mathcal{A}(\mathbf{y})) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y})$ 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 成立. 有伴随矩阵的唯一性可知, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. 故 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. 即 $\mathcal{A}$ 是对称算子.

(方法 2). 根据单位正交基的可扩充性*(上周讲义推论 2.3)*, V 有一组单位正交基 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. 则

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}, \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}.$$

于是, $\mathcal{A}$ 在该基底下的矩阵是 $A = \mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)$. 因为 A 对称, 所以 $\mathcal{A}$ 对称. $\square$

例 5.12 设 $\mathbb{R}^2$ 是标准欧式空间, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是标准基. 令 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ 由

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1$$

确定. 证明: $\mathcal{A}$ 既是斜对称算子又是正交算子.

证明. *(方法1).* 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中两个任意的向量. 则

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = -x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2, \ \mathcal{A}(\mathbf{y}) = -y_2\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2.$$

则

$$(\mathbf{x}| - \mathcal{A}(\mathbf{y})) = (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 | y_2\mathbf{e}_1 - y_1\mathbf{e}_2) = x_1y_2 - x_2y_1$$

和

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (-x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2 | y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) = x_1y_2 - x_2y_1$$

故 $(\mathbf{x}| - \mathcal{A}(\mathbf{y})) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y})$. 有伴随算子的唯一性, $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. 故 $\mathcal{A}$ 是斜对称的. 在计算

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|^2 = (-x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2 | -x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2) = x_2^2 + x_1^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

故 $\mathcal{A}$ 是保长的. 从而 $\mathcal{A}$ 是正交的.

(方法2). 根据算子 $\mathcal{A}$ 的定义, $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 A 既是斜对称的又是正交的, 所以 $\mathcal{A}$ 是斜对称和正交的. $\square$

5.3 关于正规算子的不可分子空间分解

记号. 设 $S_1, S_2 \subset V$ 非空. 如果对任意 $\mathbf{v}_1 \in S_1$ 和 $\mathbf{v}_2 \in S_2$ 都有 $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, 则称 S_1 与 S_2 正交. 记为 $S_1 \perp S_2$.

引理 5.13 设 n 阶实方阵

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O_{(n-k)\times k} & D \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } B \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R}).$$

如果 A 正规, 则 $C = O_{k\times(n-k)}$.

证明. 因为 $A^t A = AA^t$, 所以

$$\begin{pmatrix} B^t & O \\ C^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^t & O \\ C^t & D^t \end{pmatrix}.$$

于是, $B^t B = BB^t + CC^t$. 由此得出,

$$\mathrm{tr}(B^t B) = \mathrm{tr}(BB^t + CC^t) = \mathrm{tr}(BB^t) + \mathrm{tr}(CC^t).$$

因为矩阵的迹是交换不变量, 所以 $\mathrm{tr}(BB^t) = \mathrm{tr}(B^tB)$. 故 $\mathrm{tr}(CC^t) = 0$. 设 $C = (c_{i,j})_{d\times(n-d)}$. 则

$$\mathrm{tr}(CC^t) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{n-d} c_{i,j}^2.$$

故 $\mathrm{tr}(CC^t) = 0$ 蕴含 $C = O_{d\times(n-d)}$. □

引理 5.14 *设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是正规算子, $W \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则*

(i) $W^\perp$ 是 $\mathcal{A}$-子空间;

(ii) $\mathcal{A}$ 在 W 上的限制算子 $\mathcal{A}_W$ 是正规算子.

证明. (i) 设 $n = \dim(V)$ 且 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ 是 W 的一组单位正交基. 根据第三章第二讲定理 2.2 (ii), $V = W \oplus W^\perp$. 于是, $\dim(W^\perp) = n - k$. 设 $\epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n$ 是 $W^\perp$ 的一组单位正交基. 则 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n$ 是 V 的一组单位正交基. 因为 W 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以 $\mathcal{A}$ 在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵等于

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

其中 $B \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R})$. 因为 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, \epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n$ 是单位正交基且 $\mathcal{A}$ 是正规算子, 所以 A 正规 (第三章第二讲命题 5.4). 根据引理 5.13, $C = O_{k\times(n-k)}$. 于是,

$$(\mathcal{A}(\epsilon_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(\epsilon_n)) = (\epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_n)D.$$

故 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$-不变的.

(ii) 由 (i) 的证明可知,

$$A=\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

因为 $AA^t=A^tA$, 所以 $BB^t=B^tB$. 由此得出 B 是正规矩阵. 而 B 是 $\mathcal{A}_W$ 在单位正交基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k$ 下的矩阵. 根据第三章第二讲命题 4.4, $\mathcal{A}_W$ 正规. □

命题 5.15 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$ 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 则 $V^{\lambda_1}\perp V^{\lambda_2}$.

证明. 设 $\mathbf{v}_2\in V^{\lambda_2}\setminus\{\mathbf{0}\}$. 因为 V^{λ_1} 是 $\mathcal{A}$-不变的, 所以上述引理蕴含 $\left(V^{\lambda_1}\right)^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 不变的. 因为 $V=V^{\lambda_1}\oplus\left(V^{\lambda_1}\right)^{\perp}$, 所以

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1+\mathbf{w},$$

其中 $\mathbf{v}_1\in V^{\lambda_1}$, $\mathbf{w}\in\left(V^{\lambda_1}\right)^{\perp}$. 把上式两侧作用 $\mathcal{A}$ 得

$$\lambda_2\mathbf{v}_2=\lambda_1\mathbf{v}_1+\mathcal{A}(\mathbf{w}).$$

故

$$(\lambda_2-\lambda_1)\mathbf{v}_1+(\lambda_2\mathbf{w}-\mathcal{A}(\mathbf{w}))=\mathbf{0}.$$

因为$(\lambda_2\mathbf{w}-\mathcal{A}(\mathbf{w}))\in\left(V^{\lambda_1}\right)^{\perp}$, 所以 $(\lambda_1-\lambda_2)\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$. 因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 所以 $\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$. 于是, $\mathbf{v}_2=\mathbf{w}$. 故 $\mathbf{v}_2\perp V^{\lambda_1}$. □

引理 5.16 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则 V 有一维或二维的 $\mathcal{A}$ 子空间.

证明. 因为 $\mathbb{R}[t]$ 中的非平凡不可约多项式的次数都不大于 2 (第一学期第五章第三讲推论 4.10), 所以 $\mu_{\mathcal{A}} = pq$, 其中 $p, q \in \mathbb{R}[t]$, $0 < \deg(p) \leq 2$, p 在 $\mathbb{R}[t]$ 中不可约. 因为 $\deg(q) < \deg(\mu_{\mathcal{A}})$, 所以 $q(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$. 于是, 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{w} := q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. 设 $W = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$. 则 $\dim(W) > 0$. 因为

$$p(\mathcal{A})(\mathbf{w}) = p(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mu_{\mathcal{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

所以 $\deg(\mu_{\mathcal{A},\mathbf{w}}) \leq 2$. 从而 $\dim(W) \leq 2$ (第二章第四讲命题 9.2 (iii)). $\square$

注解 5.17 上述引理只需 V 是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间即可*(见柯斯特利金书 64 页定理 7).*

定理 5.18 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规, $n = \dim(V)$. 则

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s \oplus U_{2s+1} \oplus \cdots \oplus U_n,$$

其中

(i) $U_1, \ldots, U_s$ 是二维 $\mathcal{A}$-不可分子空间*;*

(ii) $U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 是一维 $\mathcal{A}$-不可分子空间*;*

(iii) $U_1, \ldots, U_s, U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 两两正交.

证明. 对 $\dim(V)$ 归纳. 当 $\dim(V)=1$ 时, 设 $s=0$, $U_1=V$ 即可. 设 $1\le \dim(V)<n$ 时定理成立. 由引理 5.16, 存在 $\mathcal{A}$-子空间 U 使得 $0<\dim(U)\le 2$. 如果 $\dim(U)=1$, 则 U-是 $\mathcal{A}$-不可分的. 如果 $\dim(U)=2$ 但 U 是 $\mathcal{A}$-可分的, 则 U 中有一维 $\mathcal{A}$ 不变子空间. 于是, 不妨设 U 是 V 中维数不超过 2 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间.

根据引理 5.14, $V=U\oplus U^{\perp}$ 且 $\mathcal{A}_{U^{\perp}}$ 是 $U^{\perp}$ 上的正规算子. 根据归纳假设, $U^{\perp}$ 是两两正交的维数不大于 2 的 $\mathcal{A}_{U^{\perp}}$-不变子空间之和. 又因为 U 与 $U^{\perp}$ 中的任何子空间都正交, 所以定理成立. □

5.4 正规矩阵的标准型

设 $\dim(V)$=1 且任意的 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 都是正规算子. 这是因为对 V 中的单位向量 $\mathbf{v}$, $\mathcal{A}(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$, 其中 λ 是某个实数.

引理 5.19 设 $\dim(V)=2$, $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规, 且 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的任意单位正交基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix},$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 且 $\beta\neq 0$.

证明. 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 V 的一组单位正交基, A 是 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 下的矩阵. 则 A 正规. 设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

由 $A^t A = A A^t$ 得

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

于是,

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \\ ab + cd = ac + bd \\ b^2 + d^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c^2 = b^2 \\ ab + cd = ac + bd \end{cases}$$

情形 1. $b = c$. 则 $\chi_A = t^2 - (a+d)t + ad - b^2$. 其判别式是 $(a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$. 故 $\mathcal{A}$ 有实特征根 λ. 设 $\mathbf{v}$ 是 λ 的一个特征向量. 则 $\langle \mathbf{v} \rangle$ 是 $\mathcal{A}$-子空间. 于是, $V = \langle \mathbf{v} \rangle \oplus \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$. 根据引理 5.14, V 是 $\mathcal{A}$-可分的, 矛盾.

情形 2. $b = -c$ 且 $c \neq 0$. 则 $a = d$. 故

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

直接验证可得 A 是正规的. $\square$

我们把矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

记为 $N(\alpha, \beta)$, 其中 $\beta \neq 0$.

定理 5.20 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规. 则存在 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_s, \beta_s, \lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, 其中 $\beta_1 \cdots \beta_s \neq 0$, 使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵等于

$$\begin{pmatrix} N(\alpha_1, \beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s, \beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

证明. 根据定理 5.18,

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s \oplus U_{2s+1} \oplus \cdots \oplus U_n,$$

其中

(i) $U_1, \ldots, U_s$ 是二维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(ii) $U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 是一维 $\mathcal{A}$-不可分子空间;

(iii) $U_1, \ldots, U_s, U_{2s+1}, \ldots, U_n$ 两两正交.

设 $\mathbf{e}_{2i-1},\mathbf{e}_{2i}$ 是 U_i 的单位正交基, $i=1,2,\dots,s$, $\mathbf{e}_j$ 是 U_j 中的单位向量, $j=2s+1,\dots,n$. 根据引理 5.19, 存在 $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{R}$, $\beta_i\neq 0$, 使得正规算子 $\mathcal{A}_{U_i}$ 在 $\mathbf{e}_{2i-1},\mathbf{e}_{2i}$ 下的矩阵是 $N(\alpha_i,\beta_i)$, $i=1,2,\dots,s$. 对于一维不变子空间 U_j, 存在 $\lambda_j\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)=\lambda_j\mathbf{e}_j,\quad j=2s+1,\dots,n.$$

因为 $U_1,\dots,U_s,U_{2s+1},\dots,U_n$ 两两正交, 所以

$$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_{2s-1},\mathbf{e}_{2s},\mathbf{e}_{2s+1},\dots,\mathbf{e}_n$$

是 V 的一组单位正交基, 且 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵如定理所述. □

推论 5.21 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 正规. 则存在 $\alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_s,\beta_s$, $\lambda_{2s+1},\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, 其中 $\beta_1\cdots\beta_s\neq 0$, 使得

$$A\sim_o B=\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

证明. 设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 由公式 $\mathcal{A}(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ 给出, 其中 $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)^t$. 把 $\mathbb{R}^n$ 看成标准欧式空间, 则标准基

$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是单位正交基且 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵等于 A. 因为 A 正规, 所以 $\mathcal{A}$ 正规(第三章第二讲命题 4.4). 根据定理 5.20, $\mathcal{A}$ 在某组单位正交基下的矩阵是 B. 故 $A \sim_o B$. $\square$

6 对称算子和对称矩阵

6.1 实对称矩阵的正交标准型

定理 6.1 *(i)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 对称. 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 不必两两不同.

(ii) 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 $A \sim_o \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 不必两两不同.

(iii) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 $\mathcal{A}$ (A) 的特征根. 特别地, 实对称矩阵和欧式空间上的对称算子的特征根都是实数.

证明. (i) 由定理 5.20 可知, 则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$B=\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_s,\beta_s$, $\lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, $\beta_1\cdots\beta_s\neq 0$. 因为 $\mathcal{A}$ 是对称算子, 所以 B 是对称矩阵(第三章第二讲命题 4.7). 设 $s>0$. 则 $N(\alpha_1,\beta_1)$ 是对称矩阵. 由此可知, $\beta_1=0$. 矛盾. 故 $s=0$.

(ii) 把 A 看成标准欧式空间中 $\mathbb{R}^n$ 上的对称算子即可.

(iii) 因为 $A\sim_o \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, 所以 $A\sim_s \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. 因为特征多项式是相似不变量(见第二章第三讲第五页), $\chi_A=(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$. $\square$

问题.

(i) 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 对称. 求 V 的某组单位正交基使得 $\mathcal{A}$ 在下的矩阵是 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

(ii) 设 $A\in\mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 求 $P\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$

基本步骤.

1. 计算 $\mathcal{A}$ 的特征根. 设互不相同的特征根是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$;

2. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, 求 V^{λ_i} 的一组基;

3. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, 利用 Gram-Schmidt 正交化求 V^{λ_i} 的一组单位正交基; $\mathbf{e}_{i,1}, \ldots, \mathbf{e}_{i,d_i}$

4. 根据命题 5.15 和对角化判别法II, $\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{1,d_1}, \ldots, \mathbf{e}_{k,1}, \ldots, \mathbf{e}_{k,d_k}$ 是 V 的一组单位正交基且在该基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵是对角的.

对于对称矩阵, 只需把它看成标准欧式空间上的线性算子即可.

例 6.2 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_4(\mathbb{R}).$$

计算 $P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ 和对角阵 B 使得 $B = P^{-1}AP$.

解. 由计算机计算得 $\chi_A(t) = (t-1)^3(t+3)$. 于是, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. 计算 V^{λ_1} 的一组基. 已知 $\dim(V^{\lambda_1}) = 3$. 于是, $\mathrm{rank}(\lambda_1 E - A) = 1$. 我们只要考虑方程

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

的解空间即可. 直接得出

$$V^{\lambda_1} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

计算 V^{λ_2} 的一组基. 因为 $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$ 且 $\mathbb{R}^4 = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$, 所以 $V^{\lambda_2} = V^{\lambda_1})^{\perp}$. 由此可知,

$$V^{\lambda_2} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

利用 Gram-Schmidt 正交化求 V^{λ_1} 的一组单位正交基得

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^t, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)^t, \quad \epsilon_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^t.$$

利用 Gram-Schmidt 正交化求 V^{λ_2} 的一组单位正交基得:
$\epsilon_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^t$. 故

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

我们得到 $P^tAP = \mathrm{diag}(1,1,1,-3)$. $\square$

推论 6.3 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 A 的正(负)惯性指数等于 A 中正(负)根的个数(在记重数的意义下). 特别地, A (半)正定当且仅当 A 的特征根都是正的(非负的).

证明. 由定理 6.1 (ii) 和 (iii), $A \sim_o \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 因为 $A \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 所以 A 的签名与 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 的签名相同. $\square$

定理 6.4 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 A 正定. 则存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^tAP = E$ 和 P^tBP 是对角阵.

证明. 因为 A 正定, 所以存在 $P_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P_1^tAP_1 = E$ (惯性定理). 令 $C = P_1^tBP_1$. 则 C 对称. 根据第三章第三讲定理 6.1 (ii), 存在 $P_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, 使得 $D = P_2^tCP_2$ 是对角阵. 令 $P = P_1P_2$. 则 $P^tBP = P_2^tCP_2 = D$ 且 $P^tAP = P_2^tEP_2 = P_2^tP_2 = E$ ($\because$ $P_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$). $\square$
另证. 设 $\mathbb{R}^n$ 的标准基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

对 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t, \mathbf{y} \in (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n$. 令对称双线性型

$$f_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^tA\mathbf{y} \quad \text{和} \quad f_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^tB\mathbf{y}.$$

则把 $\mathbb{R}^n$ 看成欧式空间, 其中 $(\mathbf{x}|\mathbf{y})_A := f_A(\mathbf{x}|\mathbf{y})$. 因为 A 是正定的, 所以上述内积是良定义的. 则存在一组关于内积 $(\,|\,)_A$ 的单位正交基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 使得 f_B 在该基下的矩阵是

对角阵. 令

$$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P,$$

其中 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 注意到 P 一般不是正交矩阵. 这是因为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 一般不是关于 $(\,|\,)_A$ 的单位正交基. 因为 f_B 在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵是对角矩阵, 所以 P^tBP 是对角阵. 又因为 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是关于 $(\,|\,)_A$ 的单位正交基, 所以

$$\delta_{i,j} = (\epsilon_i|\epsilon_j) = f_A(\epsilon_i, \epsilon_j), \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

故 f_A 在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 下的矩阵是单位阵. 即 $P^tAP = E$. □

例 6.5 设 A, B 是两个 n 阶正定矩阵. 证明:

$$\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B).$$

证明. 由上述定理存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^tAP = E$ 和 $P^tBP = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 于是

$$P^tAP + P^tBP = \mathrm{diag}(1 + \alpha_1, \ldots, 1 + \alpha_n).$$

两边取行列式得

$$\det(P)^2 \det(A + B) = \prod_{i=1}^{n}(1 + \alpha_i).$$

而

$$\det(P)^2(\det(A)+\det(B)) = \det(P^tAP)+\det(P^tBP) = 1+\prod_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

因为 B 正定, 所以 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}^+$. 于是

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)\geq 1+\prod_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

由此可知, $\det(P)^2\det(A{+}B)\geq\det(P)^2(\det(A){+}\det(B))\implies\det(A+B)\geq\det(A)+\det(B)$. $\square$

7 斜对称算子和斜对称矩阵

定理 7.1 *(i)* 设 $\mathcal{A}{\in}\mathcal{L}(V)$ 斜对称. 则存在 $\beta_1,\ldots,\beta_s{\in}\mathbb{R}\backslash\{0\}$, 使得 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$M=\begin{pmatrix} N(0,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(0,\beta_s) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) 设 $A{\in}\mathrm{SSM}_n(\mathbb{R})$. 则 A 正交相似于上述形式的矩阵.

(iii) 实斜对称矩阵和欧式空间上的斜对称算子的特征根或者是纯虚数或者等于零.

证明. (i) 由第三章第三讲定理 5.18 可知, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} N(\alpha_1, \beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s, \beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_s, \beta_s, \lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\beta_1 \cdots \beta_s \neq 0$. 因为 $\mathcal{A}$ 是斜对称算子, 所以 B 是斜对称矩阵(第三章第三讲命题 5.7). 则 $N(\alpha_i, \beta_i)$ 是斜对称矩阵. 由此可知, $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 同理, $\lambda_{2s+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

(ii) 把 A 看成标准欧式空间中 $\mathbb{R}^n$ 上的斜对称算子即可.

(iii) 因为 $A \sim_o M$, 所以 $A \sim_s M$. 故 $\chi_A = \chi_M$. 故

$$\chi_M(t) = (t^2 + \beta_1^2) \cdots (t^2 + \beta_s^2) t^{n-2s}.$$

于是, $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, \pm\beta_1\sqrt{-1}, \ldots, \pm\beta_s\sqrt{-1}\}$. □

例 7.2 设 $A \in \mathrm{SSM}_n(\mathbb{R})$. 证明 $E + A$ 可逆.

证明. *根据定理 7.1, 存在 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^t A P = M$, 其*

中 M 由定理 *7.1* 给出. 于是,

$$P^t(E+A)P = E+M = \begin{pmatrix} N(1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(1,\beta_s) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(E+M) = (1+\beta_1^2)\cdots(1+\beta_s^2) \neq 0$. 所以 $E+A$ 可逆. $\square$

8 正交算子和正交矩阵

定理 8.1 *(i)* 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正交. 则存在 $\theta_1,\ldots,\theta_s\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$ 和 $\lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n\in\{-1,1\}$ 使得 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$M = \begin{pmatrix} N(\cos(\theta_1),\sin(\theta_1)) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\cos(\theta_s),\sin(\theta_s)) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(ii) 设 $A\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 则 A 正交相似于上述形式的矩阵 M.

(iii) 正交矩阵和正交算子的(复)特征根的复数模长都等于 *1*.

证明. (i) 由第三章第三讲定理 5.18 可知, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_s,\beta_s,\lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\beta_1\cdots\beta_s \neq 0$. 因为 $\mathcal{A}$ 是正交算子, 所以 B 是正交矩阵(第三章第三讲命题 5.9). 设 $s > 0$. 则 $N(\alpha_i,\beta_i)$ 是正交矩阵且无实特征根. 故存在 $\theta_i \in (0,\pi)$ 使得 $N(\alpha_i,\beta_i) = N(\cos(\theta_i),\sin(\theta_i))$, $i = 1,2,\ldots,s$. 类似, λ_j 是一行一列的正交矩阵. 因为正交矩阵的行列式等于 ± 1, 所以 $\lambda_j \in \{-1,1\}$.

(ii) 把 A 看成标准欧式空间中 $\mathbb{R}^n$ 上的正交算子即可.

(iii) 对任意 $\theta \in (0,\pi)$, $N(\cos(\theta),\sin(\theta))$ 的特征多项式等于 $t^2 - 2\cos(\theta)t + 1$. 其根

$$\lambda = \cos(\theta) \pm \sin(\theta)\sqrt{-1}. \quad \square$$

例 8.2 设 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ 满足 $\det(P) = -1$. 证明: $\det(E+P) = 0$.

证明. 根据定理 *8.1*, 存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}PQ = M$, 其中 M 如该定理所述. 因为 $\det(P) = -1$, 所以 $\det(M) = -1$.

于是, 存在 $j \in \{2s+1, \ldots, n\}$ 使得 $\lambda_j = -1$. 我们计算得 $Q^{-1}(E+P)Q = E+M$. 从而, 行列式 $|E+P|$ 等于

$$|N(1+\cos(\theta_1), \sin(\theta_1))| \cdots |N(1+\cos(\theta_s), \sin(\theta_s))|(1+\lambda_{2s+1}) \cdots (1+\lambda_n) = 0. \quad \square$$