正规矩阵标准型的应用

2022年6月15日 6:47

记号：V是欧氏空间

$N(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$

其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 且 $\beta\neq 0$

定理：设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 正规

则

$$A\sim_o \begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$\mathrm{diag}(N(\alpha_1,\beta_1),\cdots N(\alpha_s,\beta_s),\lambda_{2s+1},\cdots\lambda_n)$

A 对称，斜对称，正交

§6 对称矩阵和对称变换

定理 设 $A\in SM_n(\mathbb{R})$

则 $\exists\ \lambda_1,\cdots\lambda_n\in\mathbb{R}$ 使得

$A\sim_o \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots\lambda_n)$

特别地，A 的所有特征根都是实数且 A 在相似意义下可对角化.

证：$A\sim_o B=\mathrm{diag}(\underbrace{N(\alpha_1,\beta_1),\cdots N(\alpha_s,\beta_s)},\lambda_{2s+1},\cdots\lambda_n)$

$\because$ A 对称且 $A\sim_c B$

$\therefore$ B 对称 $\Longrightarrow$ $N(\alpha_i,\beta_i)$ 对称

$\begin{pmatrix}\alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i\end{pmatrix}$ 且 $\beta_i\neq 0$

不对称

故 $s=0$

于是 $B=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots\lambda_n)$

$\because$ $A \sim_s B$ $\therefore$ $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 是 A 的

所有特征根. ☐

$$\boxed{A \sim_0 \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots \lambda_n)}$$

推论 设 $A \in SM_n(\mathbb{R})$ 则

A 半正定 $\Leftrightarrow$ A 的特征根都非负

A 正定 $\Leftrightarrow$ A ⋯⋯ 都正

计算问题. 给定 $A \in SM_n(\mathbb{R})$

计算 $P \in O_n(\mathbb{R})$ 和 $\lambda_1 \cdots \lambda_n \in \mathbb{R}$

使得 $P^t A P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$

① 计算 $\chi_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}$

② $\forall i \in \{1, 2, \cdots k\}$. 计算

V^{λ_i} 的一组基

③ 计算 V^{λ_i} 是一组单位正交基 B_i

④ 令 $P = (B_1, \cdots B_k)$

即可

① $V = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_k}$

② $\forall i, j \in \{1, \cdots k\}$. $i \neq j$

$V^{\lambda_i} \perp V^{\lambda_j}$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in SM_4(\mathbb{R})$

求 $P \in O_n(\mathbb{R})$ 和 对角阵 D

使得 $P^t A P = D$

解: ① $\chi_A = (t-1)^3 (t+3)$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$

$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$$

② ∵ λ_2 的代数重数是1

∴ λ_2 的几何重数是1

即 $\dim V^{\lambda_2} = 1$

∵ $\mathbb{R}^4 = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$

∴ $\dim V^{\lambda_1} = 3$

于是由对角定理

$\mathrm{rank}(\lambda_1 E - A) = 1$

$E - A$ 的第一行 $(1, -1, -1, 1)$

对应的方程是

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$V^{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\mathbb{R}^4 = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$ 且 $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$

$\Rightarrow V^{\lambda_2} = (V^{\lambda_1})^{\perp}$

$$V^{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\vec{\varepsilon_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon_3}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$V^{\lambda_1} = \langle \vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3} \rangle$, $\quad \vec{\varepsilon_4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V^{\lambda_2} = \langle \vec{\varepsilon_4} \rangle$

于是 $P = (\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}, \vec{\varepsilon_4})$ ☒

定理 设 $A, B \in SM_n(\mathbb{R})$

A 正定，则 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$

使得 $P^tAP=E$，P^tBP 是对角阵

证：$\because A$ 正定 $\therefore \exists P_1 \in GL_n(\mathbb{R})$

使得 $P_1^tAP_1=\boxed{E}$

设 $C=P_1^tBP_1$，则 C 对称

于是 由本节的定理 $\exists P_2 \in O_n(\mathbb{R})$

使得 $P_2^tCP_2=D \leftarrow$ 对角阵

令 $P=P_1P_2$

$$
\begin{aligned}
P^tAP &= (P_1P_2)^tA(P_1P_2) \\
&= P_2^t(P_1^tAP_1)P_2 \\
&= P_2^tEP_2 = P_2^tP_2 = E
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^tBP &= (P_1P_2)^tB(P_1P_2) \\
&= P_2^t(\underbrace{P_1^tBP_1}_{C})P_2 \\
&= P_2^tCP_2 \\
&= D \qquad \boxtimes
\end{aligned}
$$

例：设 $A, B \in SM_n(\mathbb{R})$，$A$ 正定

B 半正定

证明 $\det(A+B) \geq \det(A)+\det(B)$

证：由上述定理 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$

使得 $P^tAP=E$，$P^tBP=D=\mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots \alpha_n)$

$\because B$ 半正定的 $\therefore \alpha_1, \cdots \alpha_n$ 非负

$$
P^tAP+P^tBP = P^t(A+B)P = E+D
$$

$$
\det(P^t(A+B)P) = \det(\mathrm{diag}(1+\alpha_1, \cdots 1+\alpha_n))
$$

$$
\det(P^2)\det(A+B) = (1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n)
$$

$$
\det(P^tAP)+\det(P^tBP) = \det(P^2)(\det(A)+\det(B))
$$

$\|$

$\det(E)+\det(D)=1+\alpha_1\cdots\alpha_n$

$\because \alpha_1\geq 0, \cdots \alpha_n\geq 0 \therefore (1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n)$
$\geq 1+\alpha_1\cdots\alpha_n$

$\det(P)^2\det(A+B)\geq\det(P)^2(\det(A)+\det(B))$

$\Rightarrow \det(A+B)\geq\det(A)+\det(B)$ □

定理 设 $A\in\mathcal{L}(V)$ 是对称~~算子~~
则存在 V 的一组单位正交基使得
$\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是对角阵

证：设 $\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n$ 是 V 一组
单位正交基，A 是 $\mathcal{A}$ 在该
基下的矩阵。则 A 对称
由本节第一个定理，$\exists P\in O_n(\mathbb{R})$
满足 $P^tAP=D$ ← 对角阵
令 $(\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_n)=(\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n)P$
则 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_n$ 是单位正交基 □
$\mathcal{A}$ 在 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是 D □

[$\mathcal{A}$ 是可对角化，$\mathcal{A}$ 的所有特征根都是实数]

定理 设 φ 是 V 上的二次型，φ 正定，则存在 V 的
一组基 $\vec{\varepsilon}_1,\cdots\vec{\varepsilon}_n$，$\alpha_1\cdots\alpha_n\in\mathbb{R}$
使得 $\forall\vec{x}=x_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+x_n\vec{\varepsilon}_n$

$\varphi(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_n^2$

$$g(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

---

§7 斜对称矩阵和斜对称变换

定理 设 $A \in SSM_n(\mathbb{R})$

则 $A \sim_o \mathrm{diag}(N(0,\beta_1), \ldots N(0,\beta_s), 0\cdots 0)$

特别地 A 的特征根或者是 0

或者是纯虚数, $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\alpha\sqrt{-1} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

证: $A \sim_o B = (N(\alpha_1,\beta_1), \ldots N(\alpha_s,\beta_s), \lambda_{2s+1}, \ldots \lambda_n)$

$\because A \sim_c B \therefore$ B 斜对称

$\Longrightarrow N(\alpha_i,\beta_i)$ 斜对称 且 $\lambda_{2s+1}=\cdots=\lambda_n=0$

$\Rightarrow \alpha_1=\cdots=\alpha_s=0$ $\boxed{}$

$$A \sim_s \mathrm{diag}(N(0,\beta_1) \ldots N(0,\beta_s), 0 \cdots 0)$$

$$\chi_A(t) = \chi_{N(0,\beta_1)} \cdots \chi_{N(0,\beta_s)} t^{n-2s}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \qquad = (t^2+\beta_1^2) \cdots (t^2+\beta_s^2) t^{n-2s}$$

$\pm\beta_i\sqrt{-1}$, $i=1,2\cdots s$, 见 $\boxed{}$

例 设 $A \in SSM_n(\mathbb{R})$. 证明

$E + A$ 可逆

证: 由上述定理. 存在 $P \in O_n(\mathbb{R})$

使得 $P^{-1}AP = B = \mathrm{diag}(N(0,\beta_1), \ldots N(0,\beta_s), 0\cdots 0)$

$$E + P^{-1}AP = E + B$$
$$= \mathrm{diag}(N(1,\beta_1), \ldots N(1,\beta_s), 1 \cdots 1)$$

$$\det(E+B) = \det(N(1,\beta_1)) \cdots \det(N(1,\beta_s))$$
$$= (1+\beta_1^2) \cdots (1+\beta_s^2) > 0$$

$\Rightarrow E+B$ 可逆

$\Rightarrow P^{-1}EP + P^{-1}BP$ 可逆

$\Rightarrow E+A$ 可逆 □

定理：设 $A \in S(V)$ 斜对称

则 $\exists V$ 的一组单位正交基，使得

A 在该基下的矩阵

是 $\mathrm{diag}(N(0,\beta_1), \cdots N(0,\beta_s), 0 \cdots 0)$

证明：与上节对应的定理类似。

§8 正交矩阵和正交变换

定理 设 $A \in O_n(\mathbb{R})$ 则

$A \sim_o \mathrm{diag}(N(\cos\theta_1, \sin\theta_1), \cdots N(\cos\theta_s, \sin\theta_s), E_k, -E_l)$

其中 $2s+k+l=n$. $\theta_1 \cdots \theta_s \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$

证：由正规矩阵的标准型可知

$A \sim_o \mathrm{diag}(N(\alpha_1, \beta_1), \cdots N(\alpha_s, \beta_s), \lambda_{2s+1}, \cdots \lambda_n)$ B

$\because A \sim_o B \therefore B \in O_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow N(\alpha_i, \beta_i)$ 是二阶正交矩阵

λ_j 是一阶正交矩阵

二阶正交矩阵 $\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{不对称}}$, $\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{对称}}$

于是 $\exists \theta_1, \cdots \theta_s$ 不等于 π 的整数倍

使得 $N(\alpha_i, \beta_i) = N(\cos\theta_i, \sin\theta_i)$ $i=1,2 \cdots s$

$\lambda_j = \pm 1$

$\Rightarrow \lambda_{2s+1}, \cdots \lambda_{2s+k} = 1$

$\lambda_{2s+k+1}, \cdots \lambda_n = -1$

$\Rightarrow A \sim_o B.$

推论 正交矩阵的特征根 均为复数 模长等于1

($z = x + y\sqrt{-1}$, $x, y \in \mathbb{R}$

$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$)

证: $\|\lambda_j\| = 1$. $j = 2s+1, \cdots, n$

$$N(\cos\theta, \sin\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

其特征多项式

$$t^2 - (2\cos\theta)t + 1$$

特征根 $\lambda = \cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{-1}$

$\|\lambda\| = 1$ $\square$

例 设 $P \in O_n(\mathbb{R})$ 且 $\det(P) = -1$

证明 $\det(E+P) = 0$

证 由上述定理

$P \sim_o B = diag(N(\cos\theta_1, \sin\theta_1), \cdots N(\cos\theta_s, \sin\theta_s), E_k, -E_l)$

$\det(P) = \det(B)$

$\because P \sim_s B \therefore$

$= \underbrace{\det(N(\cos\theta_1, \sin\theta_1))} \cdots \underline{\det(\cos\theta_s, \sin\theta_s)} (-1)^l$

$= (-1)^l \Rightarrow l \neq 0$

$\det(E+P)$

$= \det(E+B)$

$= \det(N(1+\cos\theta_1, \sin\theta_1), \cdots, \det(1+\cos\theta_s, \sin\theta_s), 2E_k, O_{l\times l})$

$\because l > 0 \therefore \Rightarrow \det(E+P) = 0.$

$\square$

例 $Q = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}} \sim_o \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\cdots t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$

(2) 当 $Q = \begin{pmatrix} & \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

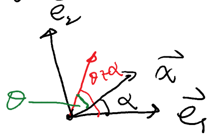
$\chi_Q(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$

$Q \sim_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



设 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

$$A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

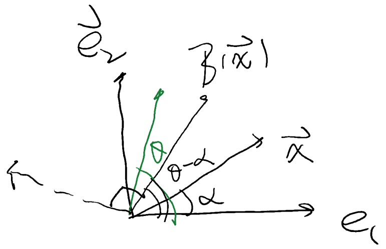
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$$

$$B: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

设 $\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

$$B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta-\alpha) \\ \sin(\theta-\alpha) \end{pmatrix}$$



$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ 是特征向量

考试内容
到此为止

§7. 平方根和极化分解

§7.1 正定算子

§9

§9.1

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 对称

如果 $\forall \vec{x} \in V \setminus \{0\}$ 时

$$(\mathcal{A}(\vec{x}) \mid \vec{x}) > 0$$

则称 $\mathcal{A}$ 是正定算子

命题：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 对称

则 $\mathcal{A}$ 正定 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 在 V

的单位正交基下的矩阵正定