正规算子和正规矩阵

2022年6月10日 20:42

回忆：V是欧氏空间

$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，

如果 $\mathcal{A}^*\in\mathcal{L}(V)$ 满足 $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$

$$(\mathcal{A}(\vec{x})\,|\,\vec{y})=(\vec{x}\,|\,\mathcal{A}^*(\vec{y}))$$

则称 $\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子

命题：$\mathcal{A}^*$ 存在且唯一

如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组单位正交基下的矩阵是 A，则 $\mathcal{A}^*$ 在同样的基底下的矩阵是 A^t.

定义：$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规

如果 $\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

$A\in M_n(\mathbb{R})$，如果

$$AA^t=A^tA$$

则称 A 是正规的

于是 当 A 是 $\mathcal{A}$ 在 V [illegible]

于是 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组~~单位正交基~~下的矩阵

则 $\mathcal{A}$ 正规

$\Longleftrightarrow$ A 正规

$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$

$\Longleftrightarrow AA^t = A^tA$

<u>例</u> 对称、斜对称和正交矩阵都是正规的

证：设 $A \in SM_n(\mathbb{R})$

则 $A^t = A \Rightarrow A^tA = A^2 = AA^t$

设 $A \in SSM_n(\mathbb{R})$ 则

$A^t = -A \Rightarrow A^tA = -A^2 = AA^t$

设 $A \in O_n(\mathbb{R})$

则 $A^tA = E \Rightarrow AA^t = E$

$\Rightarrow A^tA = AA^t$ ☒

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

如果 $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$ 即 $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$(\mathcal{A}(\vec{x})|\vec{y})=(\vec{x}|\mathcal{A}(\vec{y}))$

则称 $\mathcal{A}$ 为对称~~算子~~

如果 $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$ 即 $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$(\mathcal{A}(\vec{x})|\vec{y})=-(\vec{x}|\mathcal{A}(\vec{y}))$

则称 $\mathcal{A}$ 是斜对称的.

$\mathcal{A}$ (斜)对称

$\Longleftrightarrow$ A (斜)对称

其中 A 是 $\mathcal{A}$ 在 V 的

某组单位正交基下的矩阵.

命题: 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$

则下列断言等价

(i) $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$(\vec{x}|\vec{y})=(\mathcal{A}(\vec{x})|\mathcal{A}(\vec{y}))$ (保内积)

(ii) $\mathcal{A}$ 在 V 的某组单位正交基下的矩阵正交

(iii) $\forall \vec{x}\in V$, $\|\vec{x}\|=\|\mathcal{A}(\vec{x})\|$ (保长)

(iv) $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$、$\|\vec{x}-\vec{y}\|=\|\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y})\|$ (保距)

(iv) $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$, $\|\vec{x}-\vec{y}\| = \|\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y})\| \cdots$

证: (i) $\Rightarrow$ (ii)

设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的单位正交基 $\forall i,j\in\{1,\dots n\}$

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_i)\mid\mathcal{A}(\vec{e}_j)) = (\vec{e}_i\mid\vec{e}_j) = \delta_{i,j}$$

$$\|$$

$$\left((\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n)\vec{A}^{(i)} \,\middle|\, (\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n)\vec{A}^{(j)}\right)$$

$\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n$ 是单位正交基

$$\|$$

$$(\vec{A}^{(i)})^t\,\vec{A}^{(j)}$$

$$\Rightarrow (\vec{A}^{(i)})^t\,\vec{A}^{(j)} = \underline{\delta_{i,j}}$$

$$\Rightarrow A^t A = (\delta_{i,j})_{n\times n} = E$$

$$\Rightarrow A \text{ 正交}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 设 $\vec{x} = (\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = (\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n)\,\underline{A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}$$

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2 = (\mathcal{A}(\vec{x})\mid\mathcal{A}(\vec{x}))$$

$$= \left(A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)^t \underbrace{A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}$$ [单位正交基]

$$= (x_1\cdots x_n)\,\underline{A^t A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$= (x_1\cdots x_n)\,E\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = x_1^2+\dots+x_n^2 = \|\vec{x}\|^2$$

$\Rightarrow$ 保长

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y})\|$$
$$=\|\mathcal{A}(\vec{x}-\vec{y})\| = \|\vec{x}-\vec{y}\|$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) $\quad \forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y})\|^2$$

$$\Rightarrow (\vec{x}-\vec{y} \mid \vec{x}-\vec{y}) = (\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y}) \mid \mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y}))$$

$$\Rightarrow \|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2-2(\vec{x}\mid\vec{y})$$
$$=\|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2+\|\mathcal{A}(\vec{y})\|^2-2(\mathcal{A}(\vec{x})\mid\mathcal{A}(\vec{y}))$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|\vec{x}-\vec{0}\|^2}+\overline{\|\vec{y}-\vec{0}\|^2}-2(\vec{x}\mid\vec{y})$$
$$=\underbrace{\|\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{0})\|^2}+\overline{\|\mathcal{A}(\vec{y})-\mathcal{A}(\vec{0})\|}-2(\mathcal{A}(\vec{x})\mid\mathcal{A}(\vec{y}))$$

$$\Rightarrow (\vec{x}\mid\vec{y}) = (\mathcal{A}(\vec{x})\mid\mathcal{A}(\vec{y}))$$

$\Rightarrow$ 保内. $\quad \square$

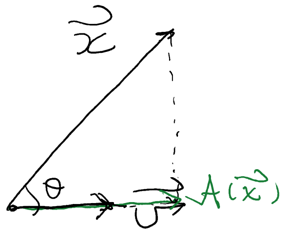
定义: 满足上述性质等价条件的算子称为正交算子.

例 设 $\vec{v}\in V$ 单位向量

$$\mathcal{A}: V \longrightarrow V$$
$$\vec{x} \longmapsto (\vec{x}\mid\vec{v})\cdot\vec{v}$$

证明: $\mathcal{A}$ 是对称算子

$\vec{x}$.



$\to A(\vec x)$ 是 $\vec x$ 在 $\langle\vec v\rangle$ 上正交投影

$$A(\vec x) = (\|\vec x\|\|\vec v\|\cos\theta)\vec v$$
$$= (\|\vec x\|\cos\theta)\vec v$$

$\forall\, \vec x, \vec y \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha\vec x+\beta\vec y) = \underbrace{(\alpha\vec x+\beta\vec y|\vec v)}\vec v$$
$$= \alpha(\vec x|\vec v)\vec v + \beta(\vec y|\vec v)\vec v$$
$$= \alpha A(\vec x) + \beta A(\vec y)$$

验证对称性.

方法1 $(\vec x|A(\vec y))$

$$= (\vec x|\underbrace{(\vec y|\vec v)}\vec v)\cdot\vec v = \underbrace{(\vec y|\vec v)(\vec x|\vec v)}\vec v$$

$$(A(\vec x)|\vec y) = ((\vec x|\vec v)(\vec y|\vec v))\vec v$$

$$\Rightarrow (\vec x|A(\vec y)) = (A(\vec x)|\vec y)$$

$\Rightarrow A$ 对称

方法2 由单位正交基扩充可知

V 有一组单位正交基

$$\underbrace{\vec v = \vec e_1, \vec e_2, \dots \vec e_n}$$

$$A(\vec e_1) = \underbrace{(\vec v|\vec v)}\vec v = \vec v = \vec e_1$$

$\forall j \in \{2,3,\cdots n\}$

$$\mathcal{A}(\vec{e_j}) = (\vec{e_j}|\vec{v})\vec{v} = \underline{(\vec{e_j}|\vec{e_1})}\,\vec{e_1} = \vec{0}$$

$\mathcal{A}$ 在 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots \vec{e_n}$ 下的矩阵是

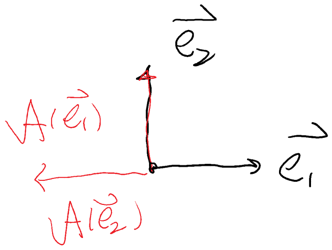
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$\because A$ 对称 $\therefore \mathcal{A}$ 对称 $\square$

例 设 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 是标准欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 标准基. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ 由

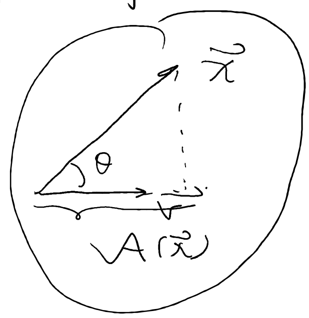
$$\mathcal{A}(\vec{e_1}) = \vec{e_2}$$
$$\mathcal{A}(\vec{e_2}) = -\vec{e_1}$$

确定. 证明 $\mathcal{A}$ 是斜对称的 也是正交的



证 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



A 斜对称. $\quad A^t A = E$

$\Longrightarrow \mathcal{A}$ 既是斜对称的 又是正交的.

---

§2 正规算子的不可分子空间分解

<u>引理1</u> 设 $A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$

其中 $B\in M_d(\mathbb{R})$. 如果 A 正规

则 $C = O_{d\times(n-d)}$

证: $A^tA = \begin{pmatrix} B^t & O^t \\ C^t & D^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} B^tB & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^t & O^t \\ C^t & D^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} BB^t+CC^t & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$\because A^tA = AA^t \quad \therefore B^tB = BB^t + CC^t$

$tr(B^tB) = tr(BB^t) + tr(CC^t)$

$$\Longrightarrow tr(CC^t) = 0$$

$$\Longrightarrow C = O.$$

[$C = (c_{i,j})_{d\times(n-d)}$

$tr(CC^t) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{n-d} c_{i,j}^2$

$tr(CC^t) = 0 \Longrightarrow c_{i,j} = 0$

[$\because c_{i,j}\in\mathbb{R}$]]

引理2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 正规,

$W \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

(i) $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$-子空间

(ii) $\mathcal{A}_W$ 正规

证：(i) 设 $\vec{e_1}, \dots \vec{e_d}$ 是 W 的一组单位正交基，把它扩充为 V 的单位正交基 $\vec{e_1}, \dots \vec{e_d}, \vec{e_{d+1}}, \dots \vec{e_n}$.

则 $\vec{e_{d+1}}, \dots \vec{e_n}$ 是 $W^{\perp}$ 的单位正交基（$\because V = W \oplus W^{\perp}$）

$\because W$ 是 $\mathcal{A}$-不变的

$\therefore \mathcal{A}$ 在 $\vec{e_1}, \dots \vec{e_d}, \vec{e_{d+1}}, \dots \vec{e_n}$ 下的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$$

其中 $B \in M_d(\mathbb{R})$.

$\because \mathcal{A}$ 正规 $\therefore A$ 正规

由引理1. $C = O_{d \times (n-d)}$

故 $\underline{A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}}$

$\Rightarrow \forall j \in \{d+1, \dots n\}.\ \mathcal{A}(\vec{e_j}) \in \langle \vec{e_{d+1}} \dots \vec{e_n} \rangle$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ ^{\parallel}_{W^{\perp}}$

$\Rightarrow W^{\perp}$ 是 $\mathcal{A}$-不变的

(ii) $A^t A = A A^t$

$\Rightarrow B^t B = B B^t$

$\because B$ 是 $\mathcal{A}_W$ 在 $e_1, \dots, e_d$ 下的矩阵

且 B 正规

$\therefore \mathcal{A}_W$ 是正规的

命题 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规

$\lambda_1, \lambda_2 \in spec_{\mathbb{R}}(\mathcal{A})$，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

则 $V^{\lambda_1} \perp V^{\lambda_2}$

（即 $\forall \vec{x_1} \in V^{\lambda_1}$，$\vec{x_2} \in V^{\lambda_2}$，$\vec{x_1} \perp \vec{x_2}$）

证：$\because V^{\lambda_1}$ 是 $\mathcal{A}$-不变的

由引理2. $V = V^{\lambda_1} \oplus (V^{\lambda_1})^{\perp}$

且 $\underbrace{(V^{\lambda_1})^{\perp}}_{\parallel \atop W}$ 是 $\mathcal{A}$-不变的.

设 $\vec{v_2} \in V^{\lambda_2}$. 我们证明 $\vec{v_2} \in W$

① — $\vec{v_2} = \vec{v_1} + \vec{w}$，其中

$\vec{v_1} \in V^{\lambda_1}$，$\vec{w} \in W$

$\mathcal{A}(\vec{v_2}) = \mathcal{A}(\vec{v_1}) + \mathcal{A}(\vec{w})$

② — $\lambda_2 \vec{v_2} = \lambda_1 \vec{v_1} + \underset{W}{\underset{\cap}{\mathcal{A}(\vec{w})}}$

"$\lambda_2$①−②"

$\vec{0} = (\lambda_2 - \lambda_1)\vec{v_1} + \lambda_2 \vec{w} - \mathcal{A}(\vec{w})$

$$\vec{0} = \underbrace{(\lambda_2-\lambda_1)\vec{v_1}}_{\in V^{\lambda_1}} + \underbrace{\lambda_2\vec{w} - A(\vec{w})}_{\in W}$$

$\because V = V^{\lambda_1} \oplus W \quad \therefore (\lambda_2-\lambda_1)\vec{v_1} = \vec{0}$

$\lambda_2 \neq \lambda_1 \Rightarrow \vec{v_1} = \vec{0}$

$\therefore \vec{v_2} \in W \Rightarrow \vec{v_2} \perp V^{\lambda_1}$

$\Rightarrow V^{\lambda_2} \perp V^{\lambda_1}$ □

引理3　设 $A \in \mathcal{L}(V)$，则

A 有一维或二维不变子空间

证：见习题课讲义。□

定理：（正规算子的不变子空间分解）

设 $A \in \mathcal{L}(V)$ 正规，$n = \dim V$.

则 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s \oplus U_{2s+1} \oplus \cdots \oplus U_n$

其中 (i) $U_1, \dots, U_s$ 是二维 A-不可分子空间

(ii) $U_{2s+1}, \dots, U_n$ 是1维 A-不可分的

(iii) $U_1, \dots, U_s, U_{2s+1}, \dots, U_n$ 两两正交.

证：对 n 归纳

$n=1$，设 $s=0$ 即可

设 结论对小于 n 维的空间成立

令 W 是维数最小的，非0的 $\mathcal{A}$-不可分子空间

由引理3. $\dim W=1$ 或 $\dim W=2$

情形1 $\dim W=1$

$$V=W\oplus W^{\perp} \quad 且 \ \dim W^{\perp}=n-1$$

对 $\mathcal{A}_{W^{\perp}}$，$W^{\perp}$ 用归纳假设即可

情形2 $\dim W=2$

如果 V 是二维的 设 $S=I$. 即可

如果 $\dim V>2$. 则

$$V=W\oplus W^{\perp}$$

且 $\dim W^{\perp}=n-2$

对 $\mathcal{A}_{W^{\perp}}$，$W^{\perp}$ 用归纳假设

即可. $\boxtimes$

---

§5.4 正规矩阵的标准型

设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 正规

当 $n=1$. $A=(a)$ $a\in\mathbb{R}$

引理4. 设 $\dim V=2$，$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$

正规，V 是 $\mathcal{A}$ 不可分的.

. . ..

则在 V 的任何单位正交基下

$\mathcal{A}$ 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}，其中 \beta\neq 0$$

证：设 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 是 V 的一组单位正交基

$\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

由 $AA^t=A^tA$ 得

$$\begin{cases}a^2+c^2=a^2+b^2\\ ab+cd=ac+bd\\ b^2+d^2=c^2+d^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c^2=b^2\\ ab+cd=ac+bd\end{cases}$$

情形1　$c=b$

$$\chi_A=t^2-(a+d)t^2+ad-b^2$$

$$\Delta=(a+d)^2-4(ad-b^2)=(a-d)^2+4b^2\geq 0$$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ 有实特征根

$\Rightarrow \exists\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量

$\Rightarrow \langle\vec{v}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$ 不变的

$$V=\langle\vec{v}\rangle\oplus\underbrace{\langle\vec{v}\rangle^{\perp}}\xrightarrow[\text{(引理2)}]{}\mathcal{A}-不变的$$

$\Rightarrow V$ 是 $\mathcal{A}$-可分的 $\rightarrow\leftarrow$

情形2　$b=-c\neq 0\Rightarrow a=d$

$$A=\begin{pmatrix}a & -c\\ c & a\end{pmatrix}\quad c\neq 0$$

直接验证 $A^tA = AA^t$

$\Rightarrow A$ 正规. □

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$

$$N(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

<u>定理</u> 设 $A \in \mathcal{L}(V)$ 正规

则存在 V 的一组单位正交基

使得 A 在该基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} N(\alpha_1, \beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & N(\alpha_s, \beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha_1 \cdots \alpha_s \in \mathbb{R}$, $\beta_1 \cdots \beta_s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda_{2s+1}, \cdots \lambda_n \in \mathbb{R}$, 都不必两两不同.

证: 由正规算子不可分子空间分解定理

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s \oplus U_{2s+1} \oplus \cdots \oplus U_n$$

其中

的 $U_1, \cdots U_s$ 是 2维 A-不变的

(ii) $U_{2s+1}, \cdots U_n$ 是 1 维 $\mathcal{A}$-不变子空间

(iii) 这些子空间 两两正交

设 $\vec{e}_{2i-1}, \vec{e}_{2i}$ 是 U_i 的单位正交基

$(i=1,2\cdots s)$

$\vec{e}_j$ 是 U_j 中单位向量，

$(j=2s+1,\cdots n$

则由 (iii)

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots \vec{e}_{2s-1}, \vec{e}_{2s}, \vec{e}_{2s+1}, \cdots \vec{e}_n$

是 V 的单位正交基

由引理4，可设

$\mathcal{A}|_{U_i}$ 在 $\vec{e}_{2i-1}, \vec{e}_{2i}$ 下的矩阵

是 $N(\alpha_i, \beta_i)$. $i=1,2\cdots s$

$\mathcal{A}|_{U_j}$ 在 $\vec{e}_j$ 下的矩阵是 λ_j

$j=2s+1, \cdots n$

由直和分解可知

$\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & N(\alpha_2,\beta_2) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & N(\alpha_s,\beta_s) & & \\ & & & & \lambda_{2s+1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

定理 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$

则 $\exists\, \alpha_1,\dots,\alpha_s\in\mathbb{R}$, $\beta_1,\dots,\beta_s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lambda_{2s+1},\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$

使得

$$A\sim_o\begin{pmatrix} N(\alpha_1,\beta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & \text{{\Large 0}} & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & \text{{\Large 0}} & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$

证: 设 $\mathbb{R}^n$ 是标准欧氏空间

$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是标准基

$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto A\vec{x}$$

则 A 正规 $\Longrightarrow$ $\mathcal{A}$ 正规

再用上述定理即可. $\square$