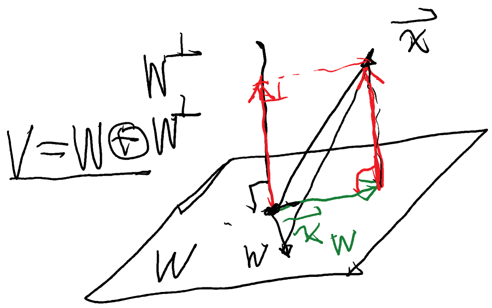
正交矩阵

2022年6月8日 7:15

设 $V$ 是欧氏空间，内积 $(\cdot|\cdot)$.




$$\|\vec{x}-\vec{w}\| \geq \|\vec{x}-\vec{x}_W\| = \|\vec{x}_{W^{\perp}}\|$$

定义：从 $\vec{x}$ 到 $W$ 的距离

是 $\|\vec{x}_{W^{\perp}}\| = \|\vec{x}-\vec{x}_W\|$

记为 $d(\vec{x}, W)$.

定理：设 $W = \langle \vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d \rangle$

且 $\vec{x} \in V$

① $\det(G(\vec{x}, \vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d)) = d(\vec{x}, W)^2 \cdot \det(G(\vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d))$

② 如果 $\vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d$ 线性无关

$$d(\vec{x}, W) = \sqrt{\frac{\det(G(\vec{x}, \vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d))}{\det(G(\vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d))}}$$

证：

$$\vec{x} = \underset{W}{\underset{\cap}{\vec{x}_W}} + \underset{W^{\perp}}{\underset{\cap}{\vec{x}_{W^{\perp}}}}$$

$(\vec{x}|\vec{x}) \quad (\vec{x}_W + \vec{x}_{W^{\perp}} \mid \vec{x}_W + \vec{x}_{W^{\perp}})$

$$(\vec{x}\mid\vec{x}) = (\vec{x}_W + \vec{x}_{W^\perp} \mid \vec{x}_W + \vec{x}_{W^\perp})$$

$$= \|\vec{x}_W\|^2 + \|\vec{x}_{W^\perp}\|^2$$

$$(\vec{x}\mid\vec{w}_i) = (\vec{x}_W + \vec{x}_{W^\perp} \mid \vec{w}_i)$$

$$= (\vec{x}_W\mid\vec{w}_i) + \underline{(\vec{x}_{W^\perp}\mid\vec{w}_i)}$$

$$= (\vec{x}_W\mid\vec{w}_i)\ ,\quad i=1,2\ldots d$$

$$\boxed{\det(G(\vec{x},\vec{w}_1,\ldots\vec{w}_d))}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \|\vec{x}_W\|^2 + \|\vec{x}_{W^\perp}\|^2, & (\vec{x}_W\mid\vec{w}_1) & \cdots & (\vec{x}_W\mid\vec{w}_d) \\ (\vec{x}_W\mid\vec{w}_1)+0 & & & \\ \vdots & & G(\vec{w}_1,\cdots\vec{w}_d) & \\ (\vec{x}_W\mid\vec{w}_d)+0 & & & \end{pmatrix}$$

$$(\vec{x}_W\mid\vec{x}_W) \to$$

$$= \det\begin{pmatrix} \|\vec{x}_W\|^2 & (\vec{x}_W\mid\vec{w}_1) & \cdots & (\vec{x}_W\mid\vec{w}_d) \\ (\vec{x}_W\mid\vec{w}_1) & & & \\ \vdots & & G(\vec{w}_1,\ldots\vec{w}_d) & \\ (\vec{x}_W\mid\vec{w}_d) & & & \end{pmatrix}$$

$$+ \det\begin{pmatrix} \|\vec{x}_{W^\perp}\|^2 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & G(\vec{w}_1,\cdots\vec{w}_d) & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$$+\det \begin{pmatrix} & & \\ \vdots & & G(\vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d) \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$\text{no} \; (\because \vec{x}_W \in \langle \vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d \rangle)$

$$= \underline{\det(G(\vec{x}_W, \vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d))}$$

$$+ d(\vec{x}, W)^2 \det(G(\vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d))$$

$$= \boxed{d(\vec{x}, W)^2 \det(G(\vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d))}$$

① 成立

② 当 $\vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d$ 线性无关时

$\det(G(\vec{w}_1, \cdots \vec{w}_d))$ 去0 因

例 行列式的几何意义

设 $\mathbb{R}^n$ 标准欧氏

$\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_n$ 线性无关

定义 由 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_n$ 构成的

平行 2n面体体积

$$V_n = \sqrt{\det(G(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_n))}$$

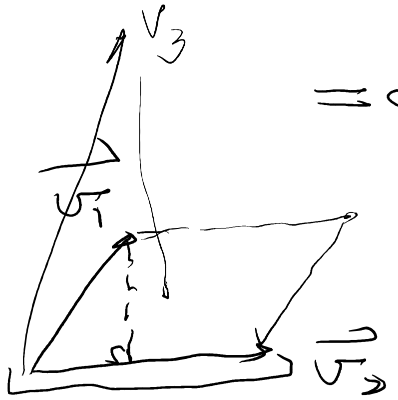
$\sqrt{(\vec{v}_1 | \vec{v}_1)} = \|\vec{v}_1\|$

$n=1$ $\sqrt{\det(G(\vec{v_1}))} = \sqrt{(\vec{v_1}|\vec{v_1})} = \|\vec{v_1}\|$

$n=2$ $V_2 = \sqrt{\det(G(\vec{v_1},\vec{v_2}))}$

$= d(\vec{v_1}, \langle\vec{v_2}\rangle)\sqrt{\det G(\vec{v_2})}$

$= d(\vec{v_1}, \langle\vec{v_2}\rangle)\,\|\vec{v_2}\|$




---

$$V_n^2 = \det(G(\vec{v_1},\ldots\vec{v_n}))$$

$$= \det\begin{pmatrix} (\vec{v_1}|\vec{v_1}) & \cdots & (\vec{v_1}|\vec{v_n}) \\ & \vdots & \\ (\vec{v_n}|\vec{v_1}) & \cdots & (\vec{v_n}|\vec{v_n}) \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \vec{v_1}^t\vec{v_1} & \cdots & \vec{v_1}^t\vec{v_n} \\ & \vdots & \\ \vec{v_n}^t\vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n}^t\vec{v_n} \end{pmatrix}$$

$$\det\Big( \underline{(\vec{v_1},\cdots\vec{v_n})}^t \, \underline{(\vec{v_1},\cdots\vec{v_n})} \Big)$$

$$= \det\left( \underbrace{(\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n})}^{T} \underbrace{(\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n})} \right)$$

$$= \left[\det(\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n})\right]^2$$

$$V_n = \left|\det(\vec{v_1}, \cdots \vec{v_n})\right|$$

思考题：$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

$A$ 是 $\mathcal{A}$ 在 $V$ 某组基下的矩阵

$\det(\mathcal{A}) = \det(A)$

问题：$\det(\mathcal{A})$ 的几何意义是什么？

---

注：最小二乘法

(the least square method)

设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$　$\vec{b} \in \mathbb{R}^m$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$A\vec{x} = \vec{b}$ 相容 $\Leftrightarrow$ $\vec{b} \in V_c(A)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad W$

$\Leftrightarrow d(\vec{b}, W) = 0$

一般：设 $\vec{b}$ 在 $W$ 中正交投影 $\vec{b_0}$

定义：设 $\vec{b}$ 在 $W$ 中正交投影

是 $\beta_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\beta_n\vec{A}^{(n)}$

则称 $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ 为 $A\vec{x}=\vec{b}$

的"最小二乘解"。

① $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解则 $\vec{b}\in W\Rightarrow \vec{b}_W=\vec{b}$

$$\beta_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\beta_n\vec{A}^{(n)}=\vec{b}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} \text{ 是 } A\vec{x}=\vec{b} \text{ 的解}$$

② $A\vec{x}=\vec{b}$ 无解，则

$$\|\beta_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\beta_n\vec{A}^{(n)}-\vec{b}\|$$

最小

例 设 $x$ 代表杂质，$y$ 代表产品合格率 已知

$$y=a(x\%)+b$$

实验数据

| $x\%$ | 3.6 | 3.7 | 3.8 | 4.0 | 4.1 | 4.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1.0 | 0.9 | 0.9 | 0.6 | 0.56 | 0.36 |

$\cdots a+b=1.0$

$$\begin{cases} 3.6a+b=1.0 \\ 3.7a+b=0.9 \\ 3.8a+b=0.9 \\ 4.0a+b=0.6 \\ 4.1a+b=0.56 \\ 4.2a+b=0.36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1.05 \\ b=4.81 \end{cases}$$

$y=-1.05x+4.81$

---

给定 $W=\langle \vec{w_1},\dots,\vec{w_d}\rangle$，$\vec{x}\in\mathbb{R}^n$

求 $\vec{x}$ 在 $W$ 上的正交投影

$$\vec{x}_W=\alpha_1\vec{w_1}+\dots+\alpha_d\vec{w_d}$$

$$(\vec{x}-\vec{x}_W)\perp\vec{w_i} \quad i=1,2,\dots,d$$

$$\Updownarrow$$

$$(\vec{x}-\vec{x}_W\,|\,\vec{w_i})=0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\vec{w_i}\,|\,\vec{x}_W)=(\vec{w_i}\,|\,\vec{x}),\quad i=1\dots d$$

$$(\vec{w_i}\,|\,\alpha_1\vec{w_1}+\dots+\alpha_d\vec{w_d})=(\vec{w_i}\,|\,\vec{x}) \quad i=1\dots d$$

得到关于 $\alpha_1\dots\alpha_d$ 的线性方程组

Core

§4 正交矩阵和正交变换

设V的两组单位正交基是

$\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$；$\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$

则∃ $P \in GL_n(\mathbb{R})$ 使得

$$(\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}) = (\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})P$$

对∀ $i,j \in \{1,\dots,n\}$

$$\delta_{ij} = (\vec{\varepsilon_i} \mid \vec{\varepsilon_j}) = \left((\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})\vec{P^{(i)}} \mid (\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})\vec{P^{(j)}}\right)$$

$$= \left(\vec{P^{(i)}}\right)^t \vec{P^{(j)}}$$

$\Rightarrow P^tP = E$

$\Rightarrow \boxed{P^t = P^{-1}}$

定义：设 $P \in GL_n(\mathbb{R})$

如果 $P^t = P^{-1}$，则称

$P$是正交矩阵 (orthogonal matrix)

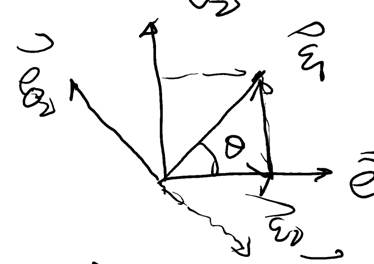
注：$E$是正交的

例：$(a)$　　$(a)^t = (a)$　　$(a)(a) = (1)$

$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

$(1)$　$(-1)$

$n=2$



$\vec{\varepsilon_1} = \cos\theta\,\vec{e_1} + \sin\theta\,\vec{e_2}$

$\vec{\varepsilon_2} = -\sin\theta\,\vec{e_1} + \cos\theta\,\vec{e_2}$

$$(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{P_1}$$

$$(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}_{P_2}$$

$\boxed{\text{只有 } P_1、P_2 \text{ 两种}}$

命题：设 $O_n(\mathbb{R})$ 代表所有$n$阶正交矩阵的集合

(i) $O_n(\mathbb{R})$ 是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的子群

(ii) $\forall P \in O_n(\mathbb{R})$，$\det(P) = \pm 1$

(iii) $P \in O_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow$ $\vec{P}^{(1)}, \ldots, \vec{P}^{(n)}$ 是构成欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一组单位正交基

证：(i) 设 $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$ 令

$$A = PQ^{-1} = PQ^t$$

$$A^t = (PQ^t)^t = QP^t$$

$$A^t A = Q \underline{P^t P} Q^{-1} = QQ^{-1} = E$$

(ii) $PP^t = E$ $\det(PP^t) = 1$

$$\Rightarrow \det(P)^2 = 1$$

(iii) $P^tP = E \Leftrightarrow (\vec{p}^{(i)})^t \vec{p}^{(j)} = \delta_{ij}$

$i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$

$\Leftrightarrow \vec{p}^{(1)}, \cdots \vec{p}^{(n)}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的

单位正交基. ∎

命题：设 $\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n$ 是 $V$ 的单位正交基

$\vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_n$ 是 $V$ 的一组基 且

$$(\vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n) P$$

则 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_n$ 是 单位正交基

$\Leftrightarrow P \in O_n(\mathbb{R})$

证：“$\Rightarrow$” 正交矩阵的定义

“$\Leftarrow$” $(\vec{p}^{(i)})^t \vec{p}^{(j)} = \delta_{ij}$

$\Rightarrow \left( (\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n) \vec{p}^{(i)} \,\middle|\, (\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n) \vec{p}^{(j)} \right) = \delta_{ij}$

$\Rightarrow (\vec{\varepsilon}_i \mid \vec{\varepsilon}_j) = \delta_{ij}$ ∎

---

定义：设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

如果存在 $P \in O_n(\mathbb{R})$ 使得

$$B = \underline{P^{-1} A P} = \underline{P^t A P}$$

则称 $B$ 与 $A$ 正交相似，记为

$$B \sim_o A$$

注："$\sim_o$" 是等价关系

注：$B \sim_o A \Rightarrow B \sim_s A$ 且 $B \sim_c A$

$\not\Leftarrow$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

证明 $A \sim_s B$，$A \sim_c B$ 但

$$A \not\sim_o B$$

证：$\mu_A = \mu_B = t^2$

$\operatorname{rank}(A) = 1 = \operatorname{rank}(B)$

$\operatorname{rank}(A^2) = 0 = \operatorname{rank}(B^2)$

$\operatorname{rank}(A^3) = 0 = \operatorname{rank}(B^3)$

$$\Rightarrow A \sim_s B$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$P^t B P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=A\Rightarrow A\sim_o B$$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\sin\theta&\cos\theta\\ *&*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\cos\theta\\ *&*\end{pmatrix}$$

$\theta=k\pi$ 代入 $\to$ ✗

第一种情形类似验证. 可知

A 不$\sim_o$ B

问题：在"$\sim_o$"找标准型.

## §5 正规算子和正规矩阵 → normal

### §5-1 伴随算子

定义：设 $A\in\mathcal{L}(V)$，如果 $B\in\mathcal{L}(V)$ 满足

$\forall\,\alpha,\beta\in V$，$(A\alpha|\beta)=(\alpha|B\beta)$

则称 B 是 A 的伴随算子

(adjoint operator)

命题: 设 $A\in\mathcal{L}(V)$

(i) $A$ 的伴随算子 $A^*$ 已存在且唯一

(ii) 设 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是 $V$ 的单位正交基

$A$ 在 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是 $A$

则 $A^*$ 在 $\cdots\cdots$ 下 $\cdots\cdots$ 是 $A^t$.

证: 定义 $B\in\mathcal{L}(V)$ 由

$$B(\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^{n}(A(\vec{e}_i)|\vec{e}_j)\,\vec{e}_i$$

$j=1,2,\cdots,n$

下面验证 $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$

$$(\vec{x}\,|\,B(\vec{y}))=(A(\vec{x})\,|\,\vec{y})$$

设 $i,j\in\{1,\cdots,n\}$

$$(\vec{e}_i\,|\,B(\vec{e}_j))=\left(\vec{e}_i\,\middle|\,\sum_{k=1}^{n}(A(\vec{e}_k)|\vec{e}_j)\,\vec{e}_k\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(A(\vec{e}_k)|\vec{e}_j)(\vec{e}_i|\vec{e}_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(A(\vec{e}_k)|\vec{e}_j)\,\delta_{ik}$$

$$=(A(\vec{e}_i)\,|\,\vec{e}_j)$$

设 $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e}_i$, $\vec{y}=\sum_{j=1}^{n}y_j\vec{e}_j$

设 $\vec{x}=\sum_{i=1}x_i\vec{e_i}$，$\vec{y}=\sum_{j=1}y_j\vec{e_j}$

$$(\vec{x}\mid B(\vec{y}))=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e_i}\;\middle|\;\sum_{j=1}^{n}y_jB(\vec{e_j})\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\underline{(\vec{e_i}\mid B(\vec{e_j}))}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(A(\vec{e_i})\mid\vec{e_j})$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_iA(\vec{e_i})\;\middle|\;\sum_{j=1}^{n}y_j\vec{e_j}\right)$$

$$=(A(\vec{x})\mid\vec{y}).$$

存在性成立

~~再~~设 $C$ 是 $A$ 的另一个伴随~~再~~

$\forall\vec{x},\vec{y}\in V$

$$(\vec{x}\mid B(\vec{y}))=(\vec{x}\mid C(\vec{y}))$$

$$(A(\vec{x})\mid\vec{y})=(\vec{x}\mid B(\vec{y}))=(\vec{x}\mid C(\vec{y}))$$

$$\Rightarrow(\vec{x}\mid\underline{B(\vec{y})-C(\vec{y})})=0$$

$$\Rightarrow B(\vec{y})-C(\vec{y})=\vec{0}$$ [$\vec{x}$ 任意性]

$$\Rightarrow B=C$$ [$\vec{y}$ 的任意性]

$$A^*(\vec{e_j})=\sum_{i=1}^{n}(A(\vec{e_i})\mid\vec{e_j})\vec{e_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\underline{((\vec{e_1},\cdots\vec{e_n})\vec{A}^{(i)}\mid\vec{e_j})}}{(\vec{e_1}\cdots\vec{e_n})(\vec{A_j})^{t}}\vec{e_i}$$ $\to a_{ji}$

$= (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})(A_j)$

$\Rightarrow$ $B$ 在 $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ 下的矩阵是 $A^t$ □

§5.2 正规算子和正规矩阵的定义

定义：设 $A \in L(V)$ 如果

$$A \circ A^* = A^* \circ A$$

则称 $A$ 是正规算子

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 如果

$$A A^t = A^t A$$

则称 $A$ 是正规矩阵

注：由上述命题可知

$A$ 是正规算子 $\Leftrightarrow$

它在 $V$ 的单位正交基下

的矩阵是正规矩阵.