单位正交基

2022年6月6日 6:32

记号. V 是欧氏空间, 内积 $(\mid)$

$\forall \vec{x} \in V$ $\quad \|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}\mid\vec{x})}$

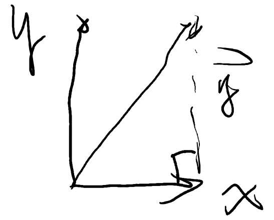
$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ $\quad \|\vec{x} - \vec{y}\|$ (距离)

如果 $(\vec{x}\mid\vec{y}) = 0$, 则称 $\vec{x} \perp \vec{y}$

C.B. $\quad |(\vec{x}\mid\vec{y})| \leq \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$

勾股定理. 如果 $\vec{x} \perp \vec{y}$, 则

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

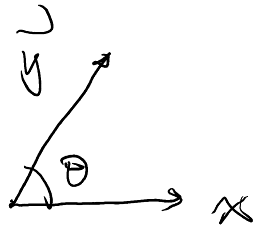


定义: 称

$$\theta = \arccos \frac{(\vec{x}\mid\vec{y})}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|} \in [0, \pi]$$

为 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的夹角

则 $\boxed{(\vec{x}\mid\vec{y}) = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \cos\theta}$



例外: $\vec{x} = \vec{0}$ 或 $\vec{y} = \vec{0}$

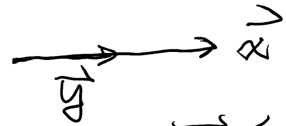
θ 不定义

当 θ 是锐角时 $(\vec{x}|\vec{y})>0$

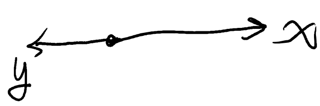
当 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $(\vec{x}|\vec{y})=0$

当 θ 钝角 $(\vec{x}|\vec{y})<0$

$\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 线性相关 $\begin{cases} \text{当 } \theta=0 \\ \text{当 } \theta=\pi \end{cases}$



$\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 同向



反向

例 (三角不等式

(i) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

(ii) 等号成立 $\Leftrightarrow$ $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 同向

证

(i)

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2$

$=(\vec{x}+\vec{y}|\vec{x}+\vec{y})$

$=(\vec{x}|\vec{x})+(\vec{y}|\vec{y})+2\underline{(\vec{x}|\vec{y})}$

$\leq \|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2+2\underline{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$

$=(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2 \Rightarrow$ (i) 成立

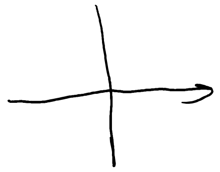
(ii) "=" 成立 $\Leftrightarrow (\vec{x}|\vec{y})\geq 0$

且 $(\vec{x}|\vec{y})=\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$

且 $(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$

令 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 同向 目

设 $\vec{x}\in V$，如果 $\|\vec{x}\|=1$，



设 $\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$

则 $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ 称为 $\vec{v}$ 单位化向量

验证：$\left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\middle|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$

$= \frac{1}{\|\vec{v}\|^2}(\vec{v}|\vec{v}) = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^2} = 1$

---

§1.3 单位正交基

设 $n=\dim V$，如果 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$

是两两正交的单位向量，则

称 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$ 是 V 的单位正交基

例 设 $\mathbb{R}^n$ 是标准欧氏空间

则称 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是标准正交基

例 设 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ 是 V 的单位正交基. 设 $\vec{x}=x_1\vec{\varepsilon}_1+\dots+x_n\vec{\varepsilon}_n$, $\vec{y}=y_1\vec{\varepsilon}_1+\dots+y_n\vec{\varepsilon}_n$. 则

$$(\vec{x}|\vec{y})=x_1y_1+\dots+x_ny_n$$

证:
$$A=G(\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n)=((\vec{\varepsilon}_i|\vec{\varepsilon}_j))_{n\times n}=(\delta_{ij})=E$$

$$(\vec{x}|\vec{y})=(x_1\dots x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=x_1y_1+\dots+x_ny_n$$

例 证明 V 中存在单位正交基

证: 设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的一组基

则 $A=G(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ 是正定的

于是 $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^tAP=E$$

令 $(\vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n) P$

则 $G(\vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_n) = P^T A P$
$= E$

$\Rightarrow \vec{\varepsilon}_1 \cdots \vec{\varepsilon}_n$ 是单位正交基

定理 (Gram-Schmidt 正交化)

设 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k \in V$ 线性无关

则存在两两正交的单位向量

$\vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_k \in V$

使得 $\forall i \in \{1, 2, \cdots k\}$

$$\boxed{\langle \vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_i \rangle = \langle \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_i \rangle}$$

证：对 i 归纳

$i = 1$ 单位化 $\vec{\varepsilon}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$ ✓

设 $1 < i \leq k$ 且

$\exists$ 两两正交的单位向量

$\vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_{i-1}$

满足 $\langle \vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_{i-1} \rangle = \langle \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_{i-1} \rangle$

① 正交化

$$(*) \quad \vec{\varepsilon}_i' = \vec{v}_i - (\vec{v}_i | \vec{\varepsilon}_1) \vec{\varepsilon}_1 - \cdots - (\vec{v}_i | \vec{\varepsilon}_{i-1}) \vec{\varepsilon}_{i-1}$$

设 $i \in \{1, \cdots, n\}$

$(\vec{\varepsilon_j}' | \vec{\varepsilon_i}) = \underline{(\vec{v_j} | \vec{\varepsilon_i})} - (\vec{v_j} | \vec{\varepsilon_1})(\vec{\varepsilon_1} | \vec{\varepsilon_i})$

$- \cdots - (\vec{v_j} | \vec{\varepsilon_{j-1}})(\vec{\varepsilon_{j-1}} | \vec{\varepsilon_i})$

$= (\vec{v_j} | \vec{\varepsilon_i}) - (\vec{v_j} | \vec{\varepsilon_i})(\vec{\varepsilon_i} | \vec{\varepsilon_i})$

$= (\vec{v_j} | \vec{\varepsilon_i}) - (\vec{v_j} | \vec{\varepsilon_i}) = 0.$

$\vec{\varepsilon_j}'$ 与 $\vec{\varepsilon_1}, \cdots \vec{\varepsilon_{j-1}}$ 都正交

由 (*) 和归纳的假设、

$\langle \vec{\varepsilon_1}, \cdots \vec{\varepsilon_{j-1}}, \vec{\varepsilon_j}' \rangle = \langle \vec{v_1}, \cdots \vec{v_{j-1}}, \vec{v_j} \rangle$

令 $\vec{\varepsilon_j} = \dfrac{\vec{\varepsilon_j}'}{\|\vec{\varepsilon_j}'\|}$

则 $\langle \vec{\varepsilon_1}, \cdots \vec{\varepsilon_{j-1}}, \vec{\varepsilon_j} \rangle = \langle \vec{v_1}, \cdots \vec{v_{j-1}}, \vec{v_j} \rangle$ $\boxed{\square}$

例：设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧氏空间

$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

令 $U = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle$

计算 U 的一组单位正交基

解 利用 G-S 正交化

1、单位化 $\vec{\varepsilon_1} = \dfrac{\vec{u_1}}{\|\vec{u_1}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \vec{u_1}$

2、正交化

$$\vec{\varepsilon_2}' = \vec{u_2} - (\vec{u_2}|\vec{\varepsilon_1})\vec{\varepsilon_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

单位化

$$\vec{\varepsilon_2} = \frac{\vec{\varepsilon_2'}}{\|\vec{\varepsilon_2'}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3、正交化

$$\vec{\varepsilon_3}' = \vec{u_3} - (\vec{u_3}|\vec{\varepsilon_1})\vec{\varepsilon_1} - (\vec{u_3}|\vec{\varepsilon_2})\vec{\varepsilon_2}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

单位化 $\vec{\varepsilon_3} = \frac{\vec{\varepsilon_3'}}{\|\vec{\varepsilon_3'}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

单位正交基是 $\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}$ □

例 设 $A \in SM_n(\mathbb{R})$ 正定

证明：存在上三角矩阵 $T \in GL_n(\mathbb{R})$

使得 $T^t A T = E$

证：在 $\mathbb{R}^n$ 上定义内积如下

设 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$(\vec{x}|\vec{y}) = (x_1 \cdots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \vec{x}^t A \vec{y}$$

$= \vec{x}^t A \vec{y}$

设 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基

由 G.-S. 正交化可知，$\mathbb{R}^n$ 有一组单位正交基 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$，满足

(*) $\langle \vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_i \rangle = \langle \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i \rangle$

$i = 1, 2, \cdots, n$

令 $(\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) T$

其中 $T \in GL_n(\mathbb{R})$

由 (*) 可知，T 是上三角的

$T^t A T = G(\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n) = E$ □

命题：设 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$ 是 V 的单位正交基，$\vec{x} = x_1 \vec{\varepsilon}_1 + \cdots + x_n \vec{\varepsilon}_n$

则 $x_i = (\vec{x} | \vec{\varepsilon}_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$

证：$(\vec{x} | \vec{\varepsilon}_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{\varepsilon}_j \middle| \vec{\varepsilon}_i \right)$

$= \sum_{j=1}^{n} x_j (\vec{\varepsilon}_j | \vec{\varepsilon}_i)$

$= \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{j,i} = x_i \delta_{i,i} = x_i$

□

定理：设 V, W 是两个 n 维欧氏空间，它们的内积分别记为 $(\ |\ )_V$，$(\ |\ )_W$

则 ∃ 线性同构

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

满足 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$

$$(\vec{x}|\vec{y})_V = (\varphi(\vec{x})|\varphi(\vec{y}))_W$$

证：设 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 是 V 的单位正交基，$\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n}$ 是 W 的单位正交基

$\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ 由

$$\varphi(\vec{e_j}) = \vec{\varepsilon_j}, \ j = 1, \dots, n$$

确定

则 φ 是线性同构

设 $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$

$\vec{y} = y_1\vec{e_1} + \dots + y_n\vec{e_n}$

$$(\vec{x}|\vec{y})_V = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

$$(\varphi(\vec{x})|\varphi(\vec{y}))_W = (x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n \,|\, y_1\vec{e}_1+\cdots+y_n\vec{e}_n)_W$$

$$= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

$$(\vec{x}|\vec{y})_V = (\varphi(\vec{x})|\varphi(\vec{y}))_W$$

∎

§2 正交补(子空间)

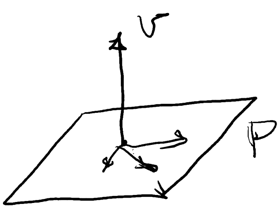
记号：设 $\vec{x}\in V$, $S\subset V$.

如果 $\forall \vec{v}\in S$ $\vec{x}\perp\vec{v}$，则称 $\vec{x}$ 与 S 正交 记为 $\vec{x}\perp S$

自己验证：$\vec{x}\perp S \iff \vec{x}\perp\langle S\rangle$

“$\Leftarrow$”：

“$\Rightarrow$”：



$\vec{v}\perp P$

定理：设 $U\subset V$ 的子空间

$$U^\perp = \{\vec{v}\in V \,|\, \vec{v}\perp U\}$$

则 (i) $U^\perp$ 是子空间

(ii) $V = U\oplus U^\perp$ [正交补]

(iii) $(U^\perp)^\perp = U$.

证：(i) 设 $\vec{x},\vec{y}\in U^\perp$, ,

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 设 $\vec{v} \in U$

$(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \mid \vec{v})$

$= \alpha\underline{(\vec{x} \mid \vec{v})} + \beta\underline{(\vec{y} \mid \vec{v})}$

$= 0 \Rightarrow \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in U^{\perp}$

的成立

(iii) 设 $\vec{x} \in U \cap U^{\perp}$

则 $\vec{x} \perp \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

故 $U + U^{\perp}$ 是直和

设 $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d}$ 是 U 的一组基

$\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_d}, \vec{u_{d+1}}, \cdots, \vec{u_n}$ 是 V 的

基. 由 G-S 正交化过程可知:

V 有一组单位正交基

$\vec{\varepsilon_1}, \cdots, \vec{\varepsilon_d}, \vec{\varepsilon_{d+1}}, \cdots, \vec{\varepsilon_n}$

且 $\langle \vec{\varepsilon_1}, \cdots, \vec{\varepsilon_d} \rangle = U$

则 $\vec{\varepsilon_{d+1}}, \cdots, \vec{\varepsilon_n} \in U^{\perp}$

$\Rightarrow \dim U^{\perp} \geq n - d$

$\dim(U + U^{\perp}) = \dim U + \dim U^{\perp}$

$\geq d + n - d = n$

$\Rightarrow V = U + U^{\perp} = U \oplus U^{\perp}$

(iv) $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$

而由(前) $U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp = V$

$\Rightarrow \dim(U^\perp)^\perp = d = \dim U$

$\Rightarrow U = (U^\perp)^\perp$ □

推论 设 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_d}$ 是 V 中两两正交的单位向量，则 V 有一组单位正交基

$\vec{v_1},\cdots,\vec{v_d}, \vec{v_{d+1}},\cdots,\vec{v_n}$

证：设 $U=\langle \vec{v_1},\cdots,\vec{v_d}\rangle$

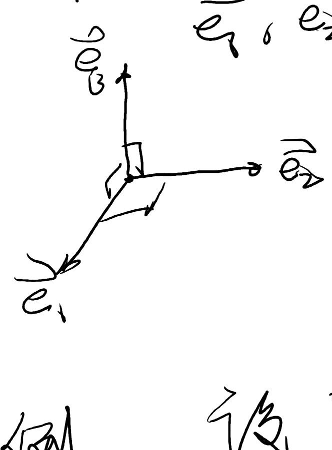
则 $U^\perp$ 有一组单位正交基

$\vec{v_{d+1}},\cdots,\vec{v_n}$

则 $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_d}, \vec{v_{d+1}},\cdots,\vec{v_n}$ 即为所求 □

例 设 $\mathbb{R}^3$ 是标准欧氏空间

$\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ 是标准基



$\langle \vec{e_1}\rangle^\perp = \langle \vec{e_2},\vec{e_3}\rangle$

$\langle \vec{e_1},\vec{e_2}\rangle^\perp = \langle \vec{e_3}\rangle$

例3 设 $\mathbb{R}^4$ 是标准欧氏空间

$\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

求 $U=\langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle$ 的正交补

的一组基

证：$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in U^{\perp} \Leftrightarrow (\vec{u_1} | \vec{x})=0$

$(\vec{u_2} | \vec{x})=0$

$(\vec{u_3} | \vec{x})=0$

$\Leftrightarrow \quad \vec{u_1}^t \vec{x}=\vec{u_2}^t \vec{x}=\vec{u_3}^t \vec{x}=0$

$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \vec{u_1}^t \\ \vec{u_2}^t \\ \vec{u_3}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$

$U^{\perp}$ 是 $(*)$ 解空间

$U^{\perp}=\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\square$

例 设标准欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 中

子空间 U 是线性方程组

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的解空间，求 $U^{\perp}$ 的一组基。

解 $\forall \vec{v} \in U$. $\underset{\Leftrightarrow}{\vec{A_1}} \vec{u}=0$, $\underset{\Leftrightarrow}{\vec{A_2}} \vec{u}=0$

由正交补的定义

$U^{\perp}=\langle (\vec{A_1})^t, (\vec{A_2})^t \rangle$

$=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\square$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad / \quad \square$

§3 正交投影

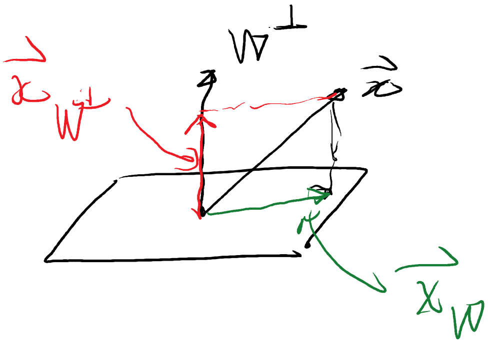
定义：设 $W \subset V$ 是子空间

则 $V = W \oplus W^{\perp}$ (*)

设 π_W 和 $\pi_{W^{\perp}}$ 是从 V 到 W 和 $W^{\perp}$ 关于 (*) 的投影

设 $\vec{x} \in V$

$\vec{x}_W := \pi_W(\vec{x})$ 称为 $\vec{x}$ 关于 (*) 在 W 中的正交投影



$\vec{x}_W \in W$

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_W + \vec{x}_{W^{\perp}}}$$

$\vec{x}_W$ → 正交投影

命题：利用上述符号

(i) 设 $\vec{y} \in W$ 则

$\vec{y} = \vec{x}_W \iff (\vec{x} - \vec{y}) \in W^{\perp}$

(iii) $\forall \vec{w} \in W$,

$$\underbrace{\|\vec{x} - \vec{x}_W\|} \leq \|\vec{x} - \vec{w}\|$$

证: 记 设 $\vec{y} = \vec{x}_W$, 则

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x}_{W^\perp} \in W^\perp$$

$$\Rightarrow (\vec{x} - \vec{y}) \perp W$$

设 $\vec{x} - \vec{y} \in W^\perp$

$$\vec{x} = \underset{\substack{\cap \\ W}}{\vec{y}} + \underset{\substack{\cap \\ W^\perp}}{(\vec{x} - \vec{y})}$$

$\Rightarrow \vec{y} = \vec{x}_W$ [直和定义]

(iii) $\vec{x} - \vec{w} = \underset{\substack{\| \\ \vec{x}_{W^\perp} \\ \cap \\ W^\perp}}{\vec{x} - \vec{x}_W} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{\vec{x}_W - \vec{w}}$

于是 $(\vec{x} - \vec{x}_W) \perp (\vec{x}_W - \vec{w})$

由勾股定理

$$\|\vec{x} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{x}_W\|^2 + \|\vec{x}_W - \vec{w}\|^2$$

$$\|\vec{x} - \vec{w}\|^2 \geq \|\vec{x} - \vec{x}_W\|^2$$

$$\Rightarrow \underline{\|\vec{x} - \vec{w}\| \geq \|\vec{x} - \vec{x}_W\|} \quad \text{日}$$