矩阵相似与欧氏空间定义

2022年6月1日 7:29

相似判别准则

设 $A, B \in M_n(F)$，则以下三个断言等价

(i) $A \sim_s B$

(ii) $\forall f \in F[x]$

$\rightarrow$ $\mathrm{rank}(f(A)) = \mathrm{rank}(f(B))$

(iii) $\boxed{\mu_A = \mu_B}$ $(\chi_A = \chi_B)$

且 对任意 μ_A 的不可约因子 p

$\rightarrow$ $\mathrm{rank}(p(A)^j) = \mathrm{rank}(p(B)^j)$

$j = 0, 1, \cdots, n-1$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 补充证明

$0 = \mathrm{rank}(\mu_A(A))$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(\mu_A(B)) = 0$

$\Rightarrow \mu_A(B) = O$

$\Rightarrow \mu_B \mid \mu_A$

同理 $\mu_A \mid \mu_B$

$\mu_A = \mu_B$ $\square$

例：设 $A \in M_n(F)$ 证明 $A \sim_s A^t$

证：$(MN)^t = N^t M^t$

$(A^k)^t = (A^t)^k$

$\therefore$ ...

所以 $\forall f \in F[t]$

$$f(A^t) = f(A)^t$$

$$\operatorname{rank}(f(A^t)) = \operatorname{rank}(f(A)^t)$$
$$= \operatorname{rank}(f(A))$$

$$\Rightarrow A \sim_s A^t \quad \text{(判别法则)}$$

例 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

如果 $\exists\ P \in GL_n(\mathbb{C})$ 使得

$$B = P^{-1}AP$$

则 $\exists\ Q \in GL_n(\mathbb{R})$ 使得

$$B = Q^{-1}AQ$$

[即实矩阵作为复矩阵相似，则它们 ~ 实 ~ 也相似]

证: $\because$ $A, B \in M_n(\mathbb{C})$

$\therefore$ $A \sim_s B$ [作为复矩阵]

由判别法 $\forall f \in \mathbb{C}[t]$

$$\operatorname{rank}(f(A)) = \operatorname{rank}(f(B))$$

$\because$ $\mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t]$

$\therefore$ $\forall g \in \mathbb{R}[t]$

$$\operatorname{rank}(g(A)) = \operatorname{rank}(g(B))$$

由判别法 $A \sim_s B$ (作为实矩阵时)

例：设 $A \in GL_n(\mathbb{C})$

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{C}$，$d_1, \cdots, d_k \in \mathbb{Z}^+$

不必两两不同

则

$$J_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1^{-1}) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\lambda_k^{-1}) \end{pmatrix}$$

证：说明：如果 $\lambda \in spec_{\mathbb{C}}(A)$

$\exists \vec{x} \neq \vec{0}$　$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$\because A$ 可逆　$\therefore \lambda\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda \neq 0$

断言：设 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

则 $M = J_n(\lambda)^{-1}$ 的 Jordan 标准型

$$J_M = J_n(\lambda^{-1})$$

断言的证明：$J_n(\lambda)\vec{v} = \lambda\vec{v}$，$\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{v} = J_n(\lambda)^{-1}\lambda\vec{v}$

$J_n(\lambda)^{-1}\vec{v} = \lambda^{-1}\vec{v}$

$\Rightarrow$ λ^{-1} 是 M 的特征根

于是 λ^{-1} 是 M 的唯一的特征根

$\mathrm{rank}(\lambda^{-1}E - M)$

$= \mathrm{rank}(M(\lambda^{-1}M^{-1} - E))$

$= \mathrm{rank}(\lambda^{-1}M^{-1} - E)$ [$\because$ M 可逆]

$= \mathrm{rank}(\lambda^{-1}(J_n(\lambda) - \lambda E))$

$= \mathrm{rank}(\lambda E - J_n(\lambda)) = n-1$

$\Rightarrow$ λ^{-1} 的几何重数是 1

$$\Rightarrow J_M = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = J_n(\lambda^{-1})$$

利用矩阵分块

$$J_A^{-1} = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1^{-1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_k}(\lambda_k^{-1}) \end{pmatrix}$$ ∎

总结　设 V 是 F 线性空间，有限维
$\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$

1. 代数同构

$\Phi:\ \mathcal{L}(V) \longrightarrow M_n(F)$

$\mathcal{A} \longmapsto A$
在 $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ 下的矩阵

$\forall \alpha, \beta \in F$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$

$$\Phi(\alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{B}) = \alpha\Phi(\mathcal{A})+\beta\Phi(\mathcal{B})$$

$$\Phi(\mathcal{A}\circ\mathcal{B}) = \Phi(\mathcal{A})\Phi(\mathcal{B}).$$

$\boxed{\text{给定 } \mathcal{A} \text{ 写出 } A.}$

2、矩阵相似 设 $A \in M_n(F)$

相似不变量

$\text{rank}(A)$, $\text{tr}(A)$, $\det(A)$

μ_A, χ_A, $\text{spec}_F(A)$

初等因子组 ← 完全不变量

$\{\text{rank}(f(A)) \mid f \in F[x]\}$

秩序列

μ_A $\{\text{rank}(\phi(A))^i \mid \phi \mid \mu_A, i \in \{0,1,\cdots,n\}\}$

3、计算

3.1 线性算子在不同基底下的矩阵

3.2 特征向量、特征子空间、特征多项式

3.3 极小多项式和循环向量

3.4、利用各种参数、μ_A 估计

Jordan 标准型

3.5 利用秩序列 确定Jordan标准型

4. 判别法

4.1 可对角化判别法

4.2 相似判别法

4.3 循环空间判别法 ($\mu_A = \chi_A$) 用到 $\boxed{\mu_{A,\vec{v}}}$

4.4 $\mathcal{A}$-不可分子空间判别法

5 多项式

5.1 多项式代入~~算子~~和矩阵

5.2 零化多项式

5.3 $\mu_{A,\vec{v}} \mid \mu_A \mid \chi_A$

$\exists \vec{v} \in V$，$\mu_{A,\vec{v}} = \mu_A$

μ_A 和 χ_A 的不可约因子相同.

如何利用 多项式除法 lcm，因式分解

6. 不变子空间

利用不变子空间化简 $\mathcal{A}$ 矩阵表示

6.1 $\ker(f(\mathcal{A}))$, $\operatorname{im}(f(\mathcal{A}))$. $f \in F[x]$

6.2 特征子空间 $V^{\lambda} = \ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$

6.3 循环子空间、 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v} = \{f(\mathcal{A})\vec{v} \mid f \in F[x]\}$

6.4 $\mathcal{A}$-不可分子空间

7、 不变子空间的直和分解

7.1 核像分解、核核分解

7.2 扩展的核核分解、

（广义特征子空间分解、根子空间分解）

$\chi_A(\lambda) = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$，$p_1, \cdots, p_s \in F[\lambda]$

首一，两两互素

$V = \ker(p_1^{n_1}(A)) \oplus \cdots \oplus \ker(p_s^{n_s}(A))$

7.3 特征子空间分解

A 可对角化 $\Leftrightarrow V = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_k}$

当 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \operatorname{spec}_F(A)$，两两不同

则 $V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_l}$ 是直和

→ 7.4、循环子空间分解

→ 7.5 A-不可分子空间分解、

---

① Jordan 型

$A \sim_s J_A$ $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$

$J_A = P^{-1} A P$ 化 → ?

$P J_A = A P$

[illegible]

② 利用Jordan标准型求解矩阵方程

第三章 内积空间

§1 欧氏空间

记号：本节中 V 是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间

§1.1 欧氏空间的内积

定义：设 f 是 V 上对称双线性型

且 $g(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$ 是正定的

则称 f 是 V 上一个内积

(V, f) 称为一个欧氏空间

注 $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto f(\vec{x}, \vec{y})$

通常记 $f(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x} \mid \vec{y})$

[在其它教科书中也记为

$(\vec{x}, \vec{y})$ 或 $\vec{x} \cdot \vec{y}$

$(\vec{x}, \vec{y})$ 或 $\vec{x} \cdot \vec{y}$

$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

△ 双线性

$$(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \mid \vec{z}) = \alpha (\vec{x} \mid \vec{z}) + \beta (\vec{y} \mid \vec{z})$$

$$(\vec{x} \mid \alpha \vec{y} + \beta \vec{z}) = \alpha (\vec{x} \mid \vec{y}) + \beta (\vec{x} \mid \vec{z}).$$

△ 对称 $\quad (\vec{x} \mid \vec{y}) = (\vec{y} \mid \vec{x})$

△ 正定 $\quad (\vec{x} \mid \vec{x}) \geq 0$ 且

$$(\vec{x} \mid \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

例 标准欧氏空间 $\mathbb{R}^n$

$$\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

$$= (x_1, \cdots, x_n) E \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(\vec{x} \mid \vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \quad \text{正定}$$

例 $V = M_n(\mathbb{R}) \quad \forall X, Y \in V$

$$(X \mid Y) = \operatorname{tr}(X^t Y)$$

验证 $(\cdot \mid \cdot)$ 是内积

(第七周习题)

例：$V=\underline{\mathbb{R}[x]^{(n)}}$，$a<b$

$\forall f, g \in V$

$$(f|g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

验证：双线性，对称 ✓

$$(f|f)=\int_a^b f^2(x)\,dx \geqslant 0$$

$$(f|f)=0 \iff f(x)=0.$$

<u>定义</u>：设 V 是欧氏空间

$\vec{v_1},\cdots\vec{v_m}\in V$

$$\underbrace{G(\vec{v_1},\cdots\vec{v_m})}=\left((\vec{v_i}|\vec{v_j})\right)_{m\times n}$$

称为 $\vec{v_1},\cdots\vec{v_m}$ 的 Gram 矩阵.

注 $G(\vec{v_1},\cdots\vec{v_m})\in SM_m(\mathbb{R})$

命题：设 $\alpha_1\cdots\alpha_m\in\mathbb{R}$

$\vec{w}=\alpha_1\vec{v_1}+\cdots+\alpha_m\vec{v_m}$

则 $(\vec{w}|\vec{w})=(\alpha_1,\cdots\alpha_m)G(\vec{v_1},\cdots\vec{v_m})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$

证：$(\vec{w}|\vec{w})=\left(\sum_{i=1}^m\alpha_i\vec{v_i}\,\middle|\,\sum_{j=1}^m\alpha_j\vec{v_j}\right)$

$$=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\alpha_i\alpha_j(\vec{v_i}|\vec{v_j})\quad[\text{双线性}]$$

$$G(\vec{v_1}\cdots\vec{v_m})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\end{pmatrix}$$

目

$= (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) G(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ □

推论 $G(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m})$ 半正定

证。设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$

$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) G(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\vec{w} | \vec{w}) \geqslant 0$ □

其中 $\vec{w} = \alpha_1 \vec{v_1} + \cdots + \alpha_m \vec{v_m}$

推论 $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m}$ 线性相关

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(G(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m})) < m$

证。$\Rightarrow$ 设 $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m}$ 线性相关

则 $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ 不全为零

使得 $\underbrace{\vec{0}}_{\vec{w}} = \alpha_1 \vec{v_1} + \cdots + \alpha_m \vec{v_m}$

$0 = (\vec{0} | \vec{0}) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) G(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow G(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m})$ 不正定

由上述推论 $\operatorname{rank}(G(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m})) < m$

$\Leftarrow$ 设 $\operatorname{rank}(G(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m})) < m$

则 $G(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m})$ 不正定

$\exists \beta_1, \cdots, \beta_m \in \mathbb{R}$ 不全为零 使得

$(\beta_1, \cdots, \beta_m) G(\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_m}) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = 0$

□

$(\beta_1,\cdots,\beta_m) \in \cdots \mathbb{R}^m$

则 $\beta_1\vec{v_1}+\cdots+\beta_m\vec{v_m}=0$ 且

推论：$G(\vec{v_1},\cdots,\vec{v_m})$ 退化 $\Leftrightarrow$ $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_m}$ 线性相关。

§1.2 长度、距离、角度、正交

定义：设 $\vec{x}\in V$

$\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$ 称为 $\vec{x}$ 的长度，记为 $\|\vec{x}\|$

再设 $\vec{y}\in V$

$\|\vec{x}-\vec{y}\|$ 称为 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 距离

例 标准欧氏空间 $\mathbb{R}^2$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ $\|\vec{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

$\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ $\|\vec{x}-\vec{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

定理 (Cauchy-Bunyakovski)

设 $\vec{x},\vec{y}\in V$ 则

(i) $|(\vec{x},\vec{y})|\leq\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$

(ii) $|(\vec{x},\vec{y})|=\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$

$\Leftrightarrow$ $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 线性相关

证：若 $\vec{x}=\vec{0}$ 或 $\vec{y}=\vec{0}$ 时 成立 显然

设 $\vec{x}\neq\vec{0}$，$\vec{y}\neq\vec{0}$，$\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$0\leq(\vec{x}+\lambda\vec{y}\,|\,\vec{x}+\lambda\vec{y})$

$=\underbrace{(\vec{y}\,|\,\vec{y})}\lambda^2+\underbrace{2(\vec{x}\,|\,\vec{y})}\lambda+\underbrace{(\vec{x}\,|\,\vec{x})}$

$\Delta\leq 0$

$4(\vec{x}\,|\,\vec{y})^2-4(\vec{y}\,|\,\vec{y})(\vec{x}\,|\,\vec{x})\leq 0$

$4|(\vec{x}\,|\,\vec{y})|^2\leq 4\|\vec{y}\|^2\|\vec{x}\|^2$

$\Longrightarrow |(\vec{x}\,|\,\vec{y})|\leq\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$，的成立

(ii) 设 $\vec{x}=\alpha\vec{y}$，$\alpha\in\mathbb{R}$

$(\vec{x}\,|\,\vec{y})=(\alpha\vec{y}\,|\,\vec{y})$

$=\alpha(\vec{y}\,|\,\vec{y})$

$\Longrightarrow |(\vec{x}\,|\,\vec{y})|=\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$ ✓

若 $|(\vec{x}\,|\,\vec{y})|=\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$

$\Longrightarrow \Delta=0$ 即 $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$(\vec{x}+\lambda\vec{y}\,|\,\vec{x}+\lambda\vec{y})=0$

$\Longrightarrow \vec{x}+\lambda\vec{y}=0\Longrightarrow\vec{x},\vec{y}$ 线性相关，证

定义：设 $\vec{x},\vec{y}\in V$

则称

如果 $(\vec{x}|\vec{y})=0$. 则称

$\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 正交. 记为 $\vec{x}\perp\vec{y}$.

引理 (i) $\vec{x}\perp\vec{x} \Longleftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$

(ii) $\vec{x}_1,\dots\vec{x}_m$ 两两正交非零向量

则 $\vec{x}_1,\dots\vec{x}_m$ 线性无关

证 (i) $\vec{x}\perp\vec{x} \Rightarrow (\vec{x}|\vec{x})=0 \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$

(ii) $G(\vec{x}_1,\dots\vec{x}_m)=\mathrm{diag}\left((\vec{x}_1|\vec{x}_1),\dots(\vec{x}_m|\vec{x}_m)\right)$

$=\mathrm{diag}(\|\vec{x}_1\|^2,\ \dots\ \|\vec{x}_m\|^2)$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(G(\vec{x}_1,\dots\vec{x}_m))=m$

$\Rightarrow \vec{x}_1,\dots\vec{x}_m$ 线性无关

例: 勾股定理

设 $\vec{x}\perp\vec{y}$. 则 $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2$

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2$

$=(\vec{x}+\vec{y}\,|\,\vec{x}+\vec{y})$

$=(\vec{x}|\vec{x})+2\underbrace{(\vec{x}|\vec{y})}_{0}+(\vec{y}|\vec{y})$

$=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2$. ∎