初等因子和矩阵相似

2022年5月30日 6:59

记号：V 是域 F 上线性空间

n 维，$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

定理：（秩序列定理）

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$M_{\mathcal{A}}$ 在 $F[\lambda]$ 中

的两两互素、首一的不可约因子是

$p_1 \cdots p_s$

它们的次数 $d_1 \cdots d_s$

设 $l \in \mathbb{Z}^+$，p_i^l 在 $\mathcal{A}$ 的

初等因子组中的重数是 $N(i,l)$

$i=1,\cdots,s$. 则

$$N(i,l) = \frac{1}{d_i}\left(R(i,l-1) + R(i,l+1) - 2R(i,l)\right)$$

其中 $R(i,j) = \operatorname{rank}(p_i(\mathcal{A})^j)$，$j \in \mathbb{N}$.

证：设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

是上述初等因子组对应的 $\mathcal{A}$ 不可分

子空间的直和分解. 则

$\mathcal{A}_{V_j}$ 的极小多项式是某个

p_i 的幂次

我们对之引理证明，与定理2,3,...,5

结论的证明类似

设 $S=\{V_1,\dots,V_k\}$

且 $S_1=\{U\in S \mid p_1 \mid \mu_{A_U}\}$

令 $W_1=\bigoplus_{U\in S_1} U$

$$\tilde{W}_1=\bigoplus_{U\in (S\setminus S_1)} U$$

则 $V=W_1\oplus\tilde{W}_1$

设 $A_1=A_{W_1}$、则

μ_{A_1} 是 p_1 的幂次

W_1、A_1、μ_{A_1}

由上节课的定理可知，p_1^l 在 A_1 的

初等因子组中的个数是

$$\frac{1}{d_1}(r_{l-1}+r_{l+1}-2r_l)$$

其中 $r_j=\mathrm{rank}(p_1(A_1)^j)$

...的

由限制算子的定义和初等因子组的定义

$\forall l \in \mathbb{Z}^+$, $N(1,l) = \frac{1}{d_1}(r_{l-1} + r_{l+1} - 2r_l)$

$r_j = \mathrm{rank}(p_1(A)^j)$

$R(i,j) = \mathrm{rank}(p_i(A)^j)$

断言1 $p_1(A)$ 在 $\widetilde{W}$ 上可逆

$A \in \mathcal{L}(V)$, $\Rightarrow p_1(A) \in \mathcal{L}(V)$

$\because$ $\widetilde{W}$ 是 A 一不变的 $\Rightarrow A_{\widetilde{W}} \in \mathcal{L}(\widetilde{W})$

$\therefore$ $\widetilde{W}$ 是 $p_1(A)$ 一不变的 $\Rightarrow p_1(A_{\widetilde{W}}) \in \mathcal{L}(\widetilde{W})$

断言1 是说
$p_1(A_{\widetilde{W}})$ 是 $\widetilde{W}$ 上的可逆算子

回忆：引理 $f \in F[x]$
设 $B \in \mathcal{L}(V)$, 设 $f = pg$, $p, g \in F[x]$
$f(B) = 0$,
$\gcd(p, g) = 1$
则 $V = \ker(p(A)) \oplus \ker(g(A))$
$p(A)$ 限制在 $\ker(g(A))$ 上可逆

设 $\mu_A = p_1^{m_1} \underbrace{p_2^{m_2} \cdots p_s^{m_s}}_{g}$

则 $\mu_A(A) = 0$

$\gcd(p_i^{m_i}, g) = 1$

由上述引理

$p_i^{m_i}(A)\big|_{\ker(g(A))}$ 是可逆的

注意到 $\widetilde{W} \subset \ker(g(A))$

$\Rightarrow p_i^{m_i}(A)$ 在 $\widetilde{W}$ 上可逆

$\Rightarrow \underline{p_i(A)}$ 是 $\widetilde{W}$ 上可逆。

断言1成立

于是 $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\operatorname{rank}(P_i^j(A_{\widetilde{W}})) = \dim \widetilde{W}}$$

断言2. $\forall j \in \mathbb{N}$

$$R(i,j) = r_j + \dim \widetilde{W}$$

断言2证明. $V = W \oplus \widetilde{W}$

$$p_i^j(A)(V) = p_i^j(A)(W) \oplus p_i^j(A)(\widetilde{W})$$

$\dim \Rightarrow \|$ $\dim \Rightarrow \|$ $\dim \|$ ← 断言1

$\operatorname{rank}(p_i^j(A))$ $\operatorname{rank}(p_i^j(A))$ $\dim \widetilde{W}$

$\|$ $\|$

$R(i,j)$ r_j

$R(1,j)$ 证

由关于直和的维数公式

$$R(1,j) = r_j + \dim \tilde{W}$$

故引理2成立

于是

$$N(1,l) = \frac{1}{d_1}(r_{l-1} + r_{l+1} - 2r_l)$$

$$= \frac{1}{d_1}\Big(R(1,l-1) - \dim\tilde{W} + R(1,l+1) - \dim\tilde{W} - 2(R(1,l) - \dim\tilde{W})\Big)$$

$$= \frac{1}{d_1}\big(R(1,l-1) + R(1,l+1) - 2R(1,l)\big)$$

注：由上述定理可知

A 的初等因子组只与秩序列有关，与它对应的 A-不变子空间直和无关，故称 A 的初等因子组是合法的。

定理（秩序列定理之矩阵版本）

设 $A \in M_n(F)$，$p_1, \cdots, p_s \in F[x]$

……

是 μ_A 的首一两两互素的不可约因子，令 $N(i,l)$ 是 p_i^l 在 A 的初等因子组中的重数

则

$$N(i,l)=\frac{1}{d_i}\left(R(i,l-1)+R(i,l+1)-2R(i,l)\right)$$

其中 $d_i=\deg p_i$

$$R(i,j)=\operatorname{rank}\left(p_i(A)^j\right)$$

$i=1,2,\cdots,s$. $j\in\mathbb{N}$.

证：设 $A: F^n\to F^n$
$\vec{x}\mapsto A\vec{x}$

再用第子版秩序列定理即得

注 设 $F=\mathbb{C}$. 则可设

$p_1=t-\lambda_1$, $\cdots$ $p_s=t-\lambda_s$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s\in\mathbb{C}$，两两不同

此时，记 $N(i,l)$ 为 $N(\lambda_i,l)$

则

$$N(\lambda_i,l)=R(\lambda_i,l-1)+R(\lambda_i,l+1)-2R(\lambda_i,l)$$

其中，$R(\lambda_i,j)=\operatorname{rank}\left((A-\lambda_i E)^j\right)$

$i=1,2,\cdots,s$. $j\in\mathbb{N}$.

记h 2,…,s、 1∈N.

注 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 的初等

因子组是

$\to$ $\{(t-\alpha_1)^{d_1},\dots,(t-\alpha_k)^{d_k}\}$

其中 $d_1,\dots,d_k\in\mathbb{Z}^+$、 $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{C}$

不必两两不同

则 $\to$

$$J_A=\begin{pmatrix} J_{d_1}(\alpha_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_k}(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

注: 因为初等因子组由 A 确定

于是 J_A 在不计 Jordan 块沿对角线

上顺序的前提下. 是唯一性

例

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\in M_7(\mathbb{C})$. 求 J_A

解 $\chi_A = \boxed{(t-2)^2}(t-1)^5$

$\lambda_1 = 2,\quad \lambda_2 = 1$

$R(\lambda_1, 0) = \mathrm{rank}((A-\lambda_1 E)^0) = 7$

$\boxed{R(\lambda_1, 1) = \mathrm{rank}(A-\lambda_1 E) = 6}$ (※)

$R(\lambda_1, 2) = \mathrm{rank}((A-\lambda_1 E)^2) = 5$

$N(\lambda_1, 1) = R(\lambda_1, 0) + R(\lambda_1, 2) - 2R(\lambda_1, 1)$
$= 7 + 5 - 2\times 6$
$= 0$

$R(\lambda_1, 3) = \mathrm{rank}((A-\lambda_1 E)^3) = 5$

$N(\lambda_1, 2) = R(\lambda_1, 1) + R(\lambda_1, 3) - 2R(\lambda_1, 2)$
$= 6 + 5 - 2\times 5 = 1$

λ_1 的代数重数是2 $\Rightarrow$ 不含有其它关于 λ_1 的Jordan块

由(※)可知 λ_1 几何重数是1 $\Rightarrow$ 关于 λ_1 的Jordan块的个数是1

我计算机可知

$R(\lambda_2, 0) = 7$
$R(\lambda_2, 1) = 4$ $\Rightarrow N(\lambda_2, 1) = 1$

$R(\lambda_2, 2) = 2$
$R(\lambda_2, 3) = 2$ $\Rightarrow N(\lambda_2, 2) = 2$

再由代数重数或几何重数的分析可知，J_A 中不会含其它关于 λ_2 的 Jordan 块

$$J_A = \begin{pmatrix} J_2(\lambda_1) & & & \\ & J_1(\lambda_2) & & \\ & & J_2(\lambda_2) & \\ & & & J_2(\lambda_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例　设 $A \in M_5(\mathbb{C})$ 满足

$\mathrm{rank}(A)=3$，$\mathrm{rank}(A^2)=2$

$\mathrm{rank}(A+E)=4$，$\mathrm{rank}((A+E)^2)=3$

求 J_A

解：由条件可知 A 有两个特征根 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$

由秩序列定理

$N(\lambda_1, 1) = 5+2-2\times 3 = 1$

$N(\lambda_2, 1) = 5+3-2\times 4 = 0$

注意到 λ_1 的几何重数是 $5-\mathrm{rank}(A)=2$

再由 $N(\lambda_2, 1)=0$ 推出、

J_A 中还有一块关于 λ_1 的 2 阶 Jordan块

进而 J_A 有且仅有一块 $J_2(\lambda_2)$

故 $$J_A = \begin{pmatrix} J_1(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

---

§12、判定矩阵相似

问题：

① 给定 $A, B \in M_n(F)$

判断 $\boxed{A \overset{?}{\sim_s} B}$

② 求 A 在相似意义下的"标准型" $\rightarrow$ Jordan 标准型

定理（相似判别定理）

设 $A, B \in M_n(F)$ 则

$A \sim_s B \iff A$ 和 B 的初等因子组相等（作为多集）

证：设 $A \sim_s B$，则

$\exists P \in GL_n(F)$ 使得

$B = P^{-1}AP$

引理：$\forall f \in F[x]$ $f(B) \sim_s f(A)$

特别的有 $\operatorname{rank}(f(A)) = \operatorname{rank}(f(B))$

引理的证明：$B = P^{-1}AP$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ B^k = P^{-1}A^kP$

$\Rightarrow f(B) = P^{-1}f(A)P$

$\Rightarrow f(B) \sim_s f(A)$

引理成立

由秩序列定理

A, B 有共同的初等因子组

$\Leftarrow$ 设 A, B 有共同的初等因子组 $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$

其中 $u_i = x^{d_i} + \alpha_{i,d_i-1}x^{d_i-1} + \cdots + \alpha_{i,1}x + \alpha_{i,0}$

$i = 1, 2, \cdots, k$

$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in_i} \in F$, $i=1,2,\cdots,k$

设 $A: F^n \to F^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, 则

$$F^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

其中 $V_1, \cdots, V_k$ 是 A-不可分解的

且 $A|_{V_i}$ 上的极小多项式是 M_i

$i=1,2,\cdots,k$

因为 V_i 是 A-循环的

所以由循环空间判别定理

可知 $A|_{V_i}$ 在 V_i 的某组基下的

矩阵是

$$C_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{in_i} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{i,n_i-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & -\alpha_{i,n_i-2} \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 & -\alpha_{i1} \end{pmatrix} \in M_{n_i}(F)$$

于是 A 在 V 的某组基下的矩阵是

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_k \end{pmatrix}_{n\times n}$$

同理 B 在 V 的另一组基下的矩阵也是 G

我们有 $A \sim_s C$，$B \sim_s G$

$\Rightarrow A \sim_s B$ ∎

定理（相似判别法 2）

设 A、$B \in M_n(F)$，则下

列断言等价

(i) $A \sim_s B$

(ii) $\boxed{\forall f \in F[t],\ \operatorname{rank} f(A) = \operatorname{rank} f(B)}$

(iii) $\chi_A = \chi_B$，设 $p_1, \cdots, p_s$

是 χ_A 的首一、两两互素的不可约因子，则

$\forall i \in \{1, 2, \cdots, s\}$，$j \in \{0, 1, \cdots, n\}$

$\operatorname{rank}(p_i(A)^j) = \operatorname{rank}(p_i(B)^j)$

证：(i) ⇒ (ii) 由判别法 1 证明

中的断言可得

(ii) ⇒ (iii) 显然

(iii) ⇒ (i) 由(iii) 和初等序列

定理可知

A 和 B 的初等因子组一样

(因为在n元置换群中不存在阶数大于n的元素)

再利用判别法上

$A \sim_s B$ □