初学园子
2022年5月5日 7:58

V 是域 F 上 n 维线性空间

$A \in \mathcal{L}(V)$

$\rightarrow V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_l$

U_i 是 A 不可分的，

设 $A_i = A|_{U_i}$，$\mu_i = \mu_{A_i}$

$\{\mu_1, \cdots \mu_l\}$ 重集 → 初等因子组

引理1 设 $A \in \mathcal{L}(V)$、

$\rightarrow V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$

U_i — A 不变的，$i=1, \cdots, k$

设 $f \in F[x]$

则 $f(A)(V) = f(A)(U_1) \oplus \cdots \oplus f(A)(U_k)$

证：设 $W = f(A)(U_1) \oplus \cdots \oplus f(A)(U_k)$

$f(A)(V) = W$

先证：$f(A)(V)=W$

设 $\vec{x}\in f(A)(V)$

则对存 $\vec{v}\in V$ 使得

$\vec{x}=f(A)(\vec{v})$

因为 $V=U_1+\cdots+U_e$

则 $\vec{v}=\underbrace{\vec{u_1}+\cdots+\vec{u_e}}$

其中 $\vec{u_i}\in U_i$

则 $\vec{x}=\underset{\underset{f(A)(U_1)}{\cap}}{f(A)(\vec{u_1})}+\cdots+\underset{\underset{f(A)(U_e)}{\cap}}{f(A)(\vec{u_e})}$

$\Rightarrow \vec{x}\in \underbrace{f(A)(U_1)+\cdots+f(A)(U_e)}_{W}$

故 $f(A)(V)\subset W$

设 $\vec{w}\in W$，则

$\exists\ \vec{u_1}\in U_1,\ \cdots\ \vec{u_e}\in U_e$

使得 $\vec{w}=f(A)(\vec{u_1})+\cdots+f(A)(\vec{u_e})$

[$\because$ W 的定义]

$\vec{w}=f(A)(\underbrace{\vec{u_1}+\cdots+\vec{u_e}}_{\vec{v}\in V})$

$\vec{v} \in V$

$\Rightarrow \vec{w} \in f(A)(V)$.

$\Rightarrow f(A)(V) = W$

下面再验证

$W = f(A)(U_1) + \cdots + f(A)(U_s)$

是直和

设 $\vec{0} = f(A)(\vec{u}_1) + \cdots + f(A)(\vec{u}_s)$

其中 $\vec{u}_1 \in U_1, \cdots, \vec{u}_s \in U_s$

∵ U_i 是 A-不变的 ∴ $f(A)(\vec{u}_i) \in U_i$

∵ $U_1 + \cdots + U_s$ 是直和

∴ $f(A)(\vec{u}_1) = \cdots = f(A)(\vec{u}_s) = \vec{0}$

于是 $f(A)(U_1) + \cdots + f(A)(U_s)$

是直和 ∎

引理2 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, V 是 A-循环的

设 $\mu_A = p^m$, 其中 $p \in F[x]$, 首一

且 $m \in \mathbb{Z}^+$,

$\dim(\cdots(A)) = \begin{cases} (m-k)\deg p, & m > k \end{cases}$

则 $\boxed{\mathrm{rank}(p^k(A))} = \begin{cases} \\ 0, & m \le k \end{cases}$

证：设 $m \le k$

$$p^k(A) = p^{k-m}(A)\,\underline{p^m(A)}$$
$$= p^{k-m}(A)\cdot O = O$$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(p^k(A)) = 0.$

设 $m > k$.

设 $V = F[A]\cdot \vec{v}$

令 $\vec{w}_k = p^k(A)(\vec{v})$

断言 $p^k(A)(V) = F[A]\cdot \vec{w}_k$

断言的证明：设 $\vec{x} \in p^k(A)(V)$

则 $\exists\, \vec{u} \in V$ 使得

$$\vec{x} = p^k(A)(\vec{u})$$

$\because V = F[A]\cdot \vec{v}$

$\therefore \exists f(A) \in F[A]$ 使得

$$\vec{u} = f(A)(\vec{v})$$

$$\vec{x} = \underline{p^k(A)}\,\underline{f(A)}\,(\vec{v})$$

$= f(A)\underbrace{p^k(A)(\vec{v})}$

$= f(A)(\vec{w_k}) \in F[A]\cdot\vec{w_k}$

$\boxed{p^k(A)(V) \subset F[A]\cdot\vec{w_k}}$ 成立

设 $\vec{x} \in F[A]\cdot\vec{w_k}$

则 存在 $g \in F[t]$ 使得

$\vec{x} = g(A)(\vec{w_k})$

$= g(A)\,p^k(A)(\vec{w_k})$

$= p^k(A)\,(\underbrace{g(A)(\vec{w_k})}_{\vec{P}})$

$\in p^k(A)(V)$

$\Rightarrow \quad F[A]\cdot\vec{w_k} \subset p^k(A)(V)$

断言成立

断言 $p^k(A)(V) = F[A]\cdot\vec{w_k}$

我们要计算 A 在 $F[A]\cdot\vec{w_k}$ 上

限制算子 B 的极小多项式

$$p^{m-k}(B)(\vec{w}_k)$$

$$= p^{m-k}(B)\,\underbrace{p^k(A)(\vec{v})}$$

$$= p^{m-k}(A)\,p^k(A)(\vec{v})$$

$$= \underbrace{p^m(A)}_{\parallel\atop 0}(\vec{v}) = \vec{0}$$

于是 $p^{m-k}(t)$ 零化 $\vec{w}_k$

进而 $p^{m-k}(t)$ 零化 $F[A]\cdot\vec{w}_k$ 中任何向量

$$\Rightarrow p^{m-k}(t) \text{ 零化 } B$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu_B(t) \mid p^{m-k}(t)}.$$

$$\mu_A = p^m$$

已知: $\mu_B(A)(\vec{w}_k) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \mu_B(A)\,p^k(A)(\vec{v}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \mu_B(A)\,p^k(A) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu_A(t) \mid \mu_B(t)\,p^k(t)}$$

$$p^m \mid \mu_B\, p^k$$

$$\Rightarrow p^{m-k} \mid \mu_B$$

$$\Rightarrow \boxed{p^{m-k} \mid \mu_B}$$

上面还说 $\mu_B \mid p^{m-k}$

于是 $\mu_B = p^{m-k}$

由定理：在循环子空间 W 上

限制算子的极小多项

式的次数 $= \dim W$

$$\Rightarrow \dim(p^k(A)(V)) = \deg p^{m-k} = (m-k)\deg p$$

$$\| \qquad =$$

$\operatorname{rank}(p^k(A))$ 　□

<u>定理</u> 设 $A \in \mathcal{L}(V)$，$\mu_A = p^m$

其中 $p \in F[x]$，首一，不可约。

$\forall \ell \in \mathbb{Z}^+$，设 n_ℓ 是 p^ℓ 在 A 的

某个固定初等因子组中的重数

则 $\boxed{n_\ell = \frac{1}{d}(r_{\ell-1} + r_{\ell+1} - 2r_\ell)}$

其中 $d = \deg(p)$，$r_i = \operatorname{rank}(p^i(A))$

$i \in \mathbb{N}$

其中 $d = \deg(p)$，

$i \in \mathbb{N}$

还设

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

是 V 的一个 $\mathcal{A}$-不可分子空间的直和分解。设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{V_i}$

$\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$，$i=1,2,\cdots,k$

$\because$ $\mu_{\mathcal{A}_i} \mid \mu_{\mathcal{A}} = p^m$，$p$ 不可约

$\therefore$ $\mu_{\mathcal{A}_i} = p^{m_i}$，其中 m_i 是某个正整数

$\because$ V_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的

$\therefore$ V_i 是 $\mathcal{A}$-循环的

故 V_i 是 $\mathcal{A}_i$-循环的

于是 $\boxed{\dim V_i} = \deg \mu_{\mathcal{A}_i}$

$= \deg p^{m_i} = \boxed{m_i d}$

$i=1,2,\cdots,k$

于是 n_l 就是 $V_1 \cdots V_k$ 中维数为 ld 的子空间的个数

下面我们计算 $V_1 \cdots V_k$ 中上述维数的子空间的个数

上述倍数的子空间的个数

设 $\mathcal{S}=\{V_1,\cdots,V_k\}$

$$\mathcal{S}_j=\{U\in\mathcal{S}\mid \dim(U)=jd\}$$

$j\in\{1,2,\cdots,m\}$

$$\boxed{V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k}$$ [定理假设]

$$\boxed{V=\bigoplus_{j=1}^{m}\left(\bigoplus_{U\in\mathcal{S}_j}U\right)}$$

$$p(A)^l(V)=p(A)^l(V)\left[\bigoplus_{j=1}^{m}\bigoplus_{U\in\mathcal{S}_j}U\right]$$

$$=\bigoplus_{j=1}^{m}\bigoplus_{U\in\mathcal{S}_j}p(A)^l(U)$$ (引理1)

$$\boxed{p(A)^l(V)=\bigoplus_{j=l+1}\bigoplus_{U\in S_j}p(A)^l(U)}$$

$j<l+1$

$U\in S_j$ 则 $\dim U=jd$

$$p^l(A)(U)=p^l(A_U)(U)$$

$$^{u}A_{W} - p^{j}$$

于是 $\operatorname{rank}(p^l(A_W)) = 0$ [引理]

$\Rightarrow p^l(A_W) = O$

$p^l(A_W)(W) = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow p^l(A)(W) = \{\vec{0}\}$

于是

$$p(A)^l(V) = \bigoplus_{j=l+1}^{m} \left(\bigoplus_{W \in S_j} p(A)^l(W) \right)$$

由直和的维数公式

$$\dim(p(A)^l(V)) = \sum_{j=l+1}^{m} \sum_{W \in S_j} \dim(p(A)^l(W))$$

$$r_l \qquad \sum_{j=l+1}^{m} \sum_{W \in S_j} (j-l)d$$

[引理]

$$r_l = \sum_{j=l+1}^{m} \sum_{W \in S_j} (j-l)d$$

$$\boxed{r_l = \sum_{j=l+1}^{m} n_j (j-l)d} \qquad l \in \mathbb{N}$$

$$r_\ell = \sum_{j=\ell+1} n_j \cdots$$

倒推：
$$n_\ell = \frac{1}{d}\left(r_{\ell-1} - 2r_\ell + r_{\ell+1}\right)$$

$$\begin{cases} r_{\ell-1} = \sum_{j=\ell}^{m} n_j (j-\ell+1) d \\ r_\ell = \sum_{j=\ell+1}^{m} n_j (j-\ell) d \\ r_{\ell+1} = \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j (j-\ell-1) d \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{\ell-1} = d\left(n_\ell + 2n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j (j-\ell+1)\right) \\ r_\ell = d\left(n_{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{m} n_j (j-\ell)\right) \\ r_{\ell+1} = d\left(\sum_{j=\ell+2}^{m} n_j (j-\ell-1)\right) \end{cases}$$

$$r_{\ell-1} - 2r_\ell + r_{\ell+1} = d\, n_\ell$$

$$n_\ell = \frac{1}{d}\left(r_{\ell-1} - 2r_\ell + r_{\ell+1}\right)$$

$\ell \in \mathbb{Z}^+$ $\qquad r_\ell = \operatorname{rank}(p^\ell(A))$ 圆

例 设

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 & 5 \\ 5 & -1 & 8 & -7 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ \cdots & & & 9 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

$$A=\begin{pmatrix} & & & \\ -2 & 1 & -8 & 4 \\ -5 & 2 & -11 & 9 \end{pmatrix}$$

求 J_A

解 而 $\chi_A=t^4$，

由 C.H定理 $\mu_A=t^m$ 其中$1\leq m\leq 4$

于是 $p(t)=t$

$p^0(A)=E \Rightarrow r_0=rank(E)=4$

$p(A)=A \Rightarrow r_1=rank(A)=2$

$p^2(A)=A^2= \quad r_2=rank(A^2)=1$

特征根 $\lambda=0$. $\dim V^\lambda=4-rank(A-0E)$

$=4-2=2$

$n_1=\frac{1}{d}(r_0+r_2-2r_1)$

$=r_0+r_2-2r_1=4+1-2\cdot 2=1$

于是在 A 的初等因子组中出现

t，只出现一次

$K^4=V_1\oplus V_2$ A-不可分分解

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\dim V_1=1 \qquad \dim V_2=3$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$J_1(\quad) \qquad J_3(0)$

$J_1(0)$ $J_3(0)$

于是 $J_A = \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 \\ 0 & J_3(0) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S_5

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 & 5 \\ 5 & -1 & 8 & -7 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & -11 & 9 \end{pmatrix}$$

定理 设 $A \in L(V)$

μ_A 在 $F[x]$ 中的不可约因式（两两不同）是 $p_1, \dots, p_s$

次数分别为 $d_1, \dots, d_s$

设 $l \in \mathbb{Z}^+$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$

令 $N(i,l)$ 是 p_i^l 在 V 的某个固定的初等因子组的重数，则

$$N(i,l) = \frac{1}{d_i}\left(R(i,l-1) + R(i,l+1) - 2R(i,l)\right)$$

$N(\lambda_i, j) = \ldots R(\lambda_i, \ldots)$ ...

其中 $R(\lambda_i, j) = \operatorname{rank}(p_i(A))^j$

$j \in \mathbb{N}$

初等因子组和 Jordan 标准型之间的关系