Jordan 标准型

2022年5月23日 7:08

回忆：设 V 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

设 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的，则

① $V = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

② $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$，$\lambda \in \mathbb{C}$

在基底 $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\vec{v}), \cdots, (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})(\vec{v}), \vec{v}$ 下

$\mathcal{A}$ 的矩阵 $$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}$$

关于 λ 的 n 阶 Jordan 块

注

① $$\operatorname{rank}(J_n(\lambda)) = \begin{cases} n, & \lambda \neq 0 \\ n-1 & \lambda = 0 \end{cases}$$

② $J_n(\lambda) = \lambda E_n + J_n(0)$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$(t) = \chi$ $\quad (t) = (t-\lambda)^n$

③ $\mu_{J_n(\lambda)}(t) = \chi_{J_n(\lambda)}(t) = (t-\lambda)^n$

④ $J_n(\lambda)$ 有唯一的特征值 λ

$\dim V^{\lambda} = 1.$

$\lambda E - J_n(\lambda) = \underbrace{J_n(0)}$

$\mathrm{rank}(J_n(0)) = n-1$

$\Rightarrow \dim(V^{\lambda}) = 1$ (对偶定理)

$J_n(\lambda)$ 可对角化 $\Leftrightarrow n=1$

定理：设 $A \in \mathcal{L}(V)$. 则 A 在 V 的某组基下的矩阵是

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

其中 $d_1, \cdots d_k \in \mathbb{Z}^+$

$\lambda_1 \cdots \lambda_k \in \mathbb{C}$

不必两两不同

注：$\lambda_1, \ldots \lambda_k$ 是 $\mathcal{A}$ 的所有特征根

证：由 $\mathcal{A}$-不可分子空间分解

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$$

其中 U_i 是 $\mathcal{A}$-不可分的

设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{U_i}$

$d_i = \dim U_i$　　$i=1,2,\ldots k$

$\mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}$

由带课最后一个引理

$\mu_i = (t-\lambda_i)^{d_i}$，　$\lambda_i \in \mathbb{C}$

$\mathcal{A}_i$ 在 U_i 的某组基下的矩阵

$\vec{e}_{i1}, \ldots \vec{e}_{id_i}$

是　$J_{d_i}(\lambda_i)$

则由上述直和分解可知

$\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_{11}, \ldots \vec{e}_{1d_1}, \ldots \vec{e}_{k1}, \ldots \vec{e}_{kd_k}$

下的矩阵是

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$ 同

$$J_A = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$ 且

称 J_A 是 A 的 (一个) Jordan 标准型.

推论 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 则 $\exists\, d_1, \dots, d_k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{C}$

$$A \sim_s \underbrace{\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}}_{\substack{\| \\ J_A}}$$

矩阵 A 的 Jordan 标准型

证 设 $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$
$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$

则由上述定理可知, 存在 $\mathbb{C}^n$ 一组基. 在该基下 A 的矩阵

是 J_A. 因为 A 是 $\mathcal{A}$ 在

特征基下的矩阵，所以 $A \sim_S J_A$ 且

分成完成 Jordan 型的存在性

$\boxed{\text{从局部到整体}}$

① $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. $\exists \vec{v} \in V$

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = \mu_{\mathcal{A}\vec{v}}(t)$$

$$V = K_1 \oplus \cdots \oplus K_k \quad \leftarrow \text{divide}$$

(核核分解)

$$\vec{v}_1, \ \ldots \ \vec{v}_k \quad \leftarrow \text{conquer}$$

$$\underbrace{\vec{v} = \vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_k} \quad \leftarrow \text{combine}$$

② Jordan 特征型 的存在性

③ C. H 定理

注 低阶 Jordan 特征型

比较简单

$n=1.$ $\quad J_1(\lambda) = (\lambda)$ 任何一阶矩阵本身是Jordan标准型

$n=2$ $\quad \chi_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$

2.1. $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow A$ 可对角化

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \underset{J_A}{\underset{\|}{\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_2) \end{pmatrix}}}$$

2.2 $\quad \lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$

2.2.1 $\quad \mu_A(t) = t - \lambda$

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \underset{J_A}{\underset{\|}{\begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 \\ 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix}}}$$

2.2.2 $\quad \mu_A(t) = (t-\lambda)^2$

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_2(\lambda)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{\lambda_1 \neq \lambda_2}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$n=3$ $\quad \chi_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$

$\underline{n=3}$ $\chi_A(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$

3.1 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 两两不同 $\Rightarrow A$ 可对角化

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = J_A$$

3.2 $\lambda_1=\lambda_2=:\lambda$, $\lambda_3 \neq \lambda$

3.2.1 $\mu_A = \underbrace{(t-\lambda)}\underbrace{(t-\lambda_3)}$

由可对角化判别法 ∇ 可知

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = J_A$$

3.2.2 $\mu_A = \underbrace{(t-\lambda)^2}(t-\lambda_3)$

$$A \sim_s \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_3} \end{pmatrix} = J_A = \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_1(\lambda_3) \end{pmatrix}$$

3.3. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=:\lambda$

3.3.1 $\mu_A(t)=t-\lambda$ 可对角化

$$A \sim_s \lambda E_3$$

3.3.2 $\mu_A(t)=(t-\lambda)^2$

$$A \sim_s \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_1(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

3.3.3. $\mu_A=(t-\lambda)^3$

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.3.3. $\mu_A = (t-\lambda)^3$

$$A \sim_s J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

例

$$A = \begin{pmatrix} J_2(0) & O \\ O & O \end{pmatrix}_{4\times4} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

t^2 $J_1(0)$ $J_1(0)$

$$B = \begin{pmatrix} J_2(0) & O \\ O & J_2(0) \end{pmatrix}_{4\times4} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$\chi_A = t^4$, $\chi_B = t^4$

$\mu_A = \mathrm{lcm}(t^2, t) = t^2$, $\mu_B = \mathrm{lcm}(t^2, t^2) = t^2$

$A \not\sim_s B$ $(\because \mathrm{rank}(A) = 1,\ \mathrm{rank}(B) = 2)$

设

$$J_A = \begin{pmatrix} \underline{J_{d_1}(\lambda_1)} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \underline{J_{d_k}(\lambda_k)} \end{pmatrix}$$

① $\mathrm{rank}(J_A) = \underbrace{\mathrm{rank}(J_{d_1}(\lambda_1))} + \cdots + \underbrace{\mathrm{rank}(J_{d_k}(\lambda_k))}$

② $\mu_{J_A}(t) = \mathrm{lcm}\left((t-\lambda_1)^{d_1}, \ldots, (t-\lambda_k)^{k}\right)$

$\chi_{J_A}(t) = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_k)^{d_k}$

③ 设 $\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$, 则 J_A 中至少包含

一个关于λ的Jordan块

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

④ 设 $\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$. 则 λ 的~~代数~~重数是 λ 在 J_A 的~~对~~角线上出现的次数

[因为 $\chi_A(t) = (t-\lambda)^a p(t)$, 其中 $p(\lambda) \neq 0$

$= (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_k)^{d_k}$]

λ 的几何重数是 J_A 中以 λ 为特征值的Jordan块的个数

$$\underbrace{J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{n - \mathrm{rank}(\lambda E - J_A)} = n - \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \underbrace{-J_{d_1}(\lambda_1 - \lambda)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{-J_{d_k}(\lambda_k - \lambda)} \end{pmatrix}$$

$\|$

$\dim V^{\lambda}$

$=$ [$-J_{d_1}(\lambda_i - \lambda)$ 中 $\lambda_i - \lambda = 0$ 的块的个数]

$= J_{d_1}(\lambda_1) \cdots J_{d_k}(\lambda_k)$ 中 $\underbrace{\lambda_i = \lambda \text{ 的个数}}$

(V) λ 在极小多项式中的重数

等于 J_A 中关于 λ 的Jordan块的最大阶数

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & J_{d_l}(\lambda) & & & \\ & & & J_{d_{l+1}}(\lambda_{l+1}) & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

[$\lambda_{l+1}, \dots \lambda_k$ 都不等于 λ]

$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_l > 0$

$$\mu_{J_A}(t) = \mathrm{lcm}\big(\underline{(t-\lambda)^{d_1}}, \dots (t-\lambda)^{d_l}, (t-\lambda_{l+1})^{d_{l+1}}, \dots (t-\lambda_k)^{d_k}\big)$$

$$= (t-\lambda)^{d_1} \underbrace{\mathrm{lcm}\big((t-\lambda_{l+1})^{d_{l+1}}, \dots, (t-\lambda_k)^{d_k}\big)}$$

$\Rightarrow$ λ 在 $\mu_{J_A}(t)$ 中的重数是 d_1

— λ的代数重数是 J_A 中 λ 在对角线上出现的个数

— λ的几何重数是 J_A 中以λ为特征

值的 Jordan 块的个数

一 λ 在 $\mu_A(t)$ 中的重数是 J_A 中以 λ 为特征值的最大 Jordan 块的阶数

例 设 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

求 $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

的 Jordan 标准型

解 $\underbrace{\chi_A(t) = (t-\alpha)^3}_{\text{代数重数 } 3}$，$\alpha$ 是唯一特征值

α 的几何重数 $= \dim V^\alpha$

$= 3 - \operatorname{rank}(\alpha E - A) = 3 - \underbrace{\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{1}$

$= 2$

$$J_A = \begin{pmatrix} J_2(\alpha) & 0 \\ 0 & J_1(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha} \end{pmatrix}$$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

$\chi_A(t) = (t-2)(t-1)^2$

$$\chi_A(t)=(t-2)(t-1)^2$$

$\underbrace{\lambda_1=1}_{\text{代数重数}2}$,　$\lambda_2=2$ ← 代数重数是一

λ_2的几何重数 $=\dim V^{\lambda_2}$

$$=3-\operatorname{rank}(A-E)=3-\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=1$$

$$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&1\\0&1\end{matrix}}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0\end{matrix}&\boxed{2}\end{pmatrix}$$

例　$S=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\&\cdots&&\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\in M_n(K)$

$(n>1)$

求 J_S

解：直接计算得

$$S^2=nS$$

$$S^2-nS=O$$

设 $f(t)=t^2-nt\Rightarrow f(A)=O$

$$\mu_S(t)=\begin{cases}t\\t-n\\t^2-nt=t(t-n)\end{cases}\Rightarrow S\text{可对角化}$$

$\Big(\, n\;0\;\cdots\;0 \;\Big)$ …… $\operatorname{rank}(S)=1$

$C E - nE = \mathbb{C}(\dots)$

$$S \sim_s \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = J_S. \quad \therefore rank(S)=1$$

关于 J_A 的两个秘密

① 唯一性？

② 设 $\lambda \in spec_{\mathbb{C}}(A)$，$J_A$ 中

关于 λ 的 Jordan 块的阶各为多少？

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_1(0) & \\ & & J_1(0) \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0) \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

"一些矩阵"

§11 初等因子组

记号. 本节中 F 是任意域，V 是 F 上 n 维线性空间

重集 multi-set

例 $S = \underline{\{a, a, b\}}$，$T = \underline{\{a, b\}}$

例 $S=\underbrace{\{a,a,b\}}$, $T=\underbrace{\{a,b\}}$

做为重集 $S\neq T$, 因为 a 在 S 中的重数是2, a 在 T 中的重数是1

例 $24=2^3\cdot 3$. $\underbrace{\{2,3\}}$

$\underbrace{\{2,2,2,3\}}$

定义: 设 $A\in\mathcal{L}(V)$

$$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_l \quad (*)$$

是 V 的一个 A-不可分子空间分解

令 $A_i=A_{U_i}$, $\mu_i=\mu_{A_i}$, $i=1,2\cdots l$

则重集 $\{\mu_1,\cdots\mu_l\}$ 称为 A 关于 $(*)$ 的初等因子组.

例 $A=\mathcal{E}$. 设 $\underbrace{\vec{e}_1\cdots\vec{e}_n}$ 是 V 的一组基 则 $\langle\vec{e}_i\rangle$ 是 A-不可分的, $i=1,2\cdots n$

且

$$V=\langle\vec{e}_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\vec{e}_n\rangle \quad (**)$$

而 $A(\vec{e}_i)=\vec{e}_i$, $i=1,2\cdots n$

$\Rightarrow \mathcal{A}_i$ 是 $\langle \vec{e}_i \rangle$ 到 $\langle \vec{e}_i \rangle$ 的零映射

$\mu_{\mathcal{A}_i} = t-1, \quad i=1,2\cdots n$

关于(**)的初等因子组是

$$\{\underbrace{t-1,\ t-1,\ \cdots\ t-1}_{n}\}$$

本节的目的

(i) 对于任何 V 的 $\mathcal{A}$-不变子空间分解

初等因子组相同

(ii) 当 $F=\mathbb{C}$, 初等因子组唯一确定

$\mathcal{A}$ 的 Jordan 标准型

(iii) 初等因子组可以通过计算

$\boxed{\text{若干}}$ 矩阵的秩得到

[依赖于那个美好的谎言]