第二章　线性算子

定义 9.5 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathbf{v} \in V$. 如果 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是 V 上的循环算子, $\mathbf{v}$ 是 V 中的循环向量, V 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathbf{v}$ 的循环空间. 简称 $\mathcal{A}$-循环空间.

例 9.6 考虑导数算子 $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[x]^{(n)})$. 则

$$\mathcal{D}^i(x^{n-1}) = \alpha_i x^{n-i-1}, \quad \text{其中 } \alpha_i \in (F \setminus \{0\}),\ i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

于是,

$$x^{n-1}, \mathcal{D}(x^{n-1}), \ldots, \mathcal{D}^{n-1}(x^{n-1})$$

是 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 的一组基. 由此得出 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是关于 $\mathcal{D}$-循环空间.

定理 9.7 *(循环子空间分解)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则存在 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ 使得

$$V = (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}_1) \oplus \cdots \oplus (F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}_\ell).$$

证明. 设 $n = \dim(V)$. 我们对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 结论成立. 设 $n > 1$ 且结论对维数小于 n 的任何线性空间成立.

考虑 n 维情形. 如果 V 是 $\mathcal{A}$-循环的, 取 $\ell = 1$ 即可. 否则, 存在 $\mathbf{w} \in V$ 使得 $F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{w}$ 在所有 $\mathcal{A}$ 循环子空间中维数最大. 设该维数等于 m. 则 $0 < m < n$. 我们将构造一

个 $\mathcal{A}$-子空间 W 使得 $V=(F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w})\oplus W$. 然后把归纳假设用到 W 上即可.

把 $F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w}$ 的基底 $\mathbf{w},\mathcal{A}(\mathbf{w}),\ldots,\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})$ 扩充为 V 的一组基$\mathbf{w},\mathcal{A}(\mathbf{w}),\ldots,\mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w}),\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}),\epsilon_{m+1},\ldots,\epsilon_n$. 由线性映射基本定理 II, 存在唯一的线性函数 $f\in V^*$ 满足

$$f(\mathcal{A}^i(\mathbf{w}))=0,\quad i=0,1,\ldots,m-2,$$

和

$$f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}))=1,\quad f(\epsilon_j)=0,\ j=m+1,\ldots,n.$$

设 $f_k=f\circ\mathcal{A}^k, k=0,1,\ldots,m-1$, 且

$$W=\cap_{k=0}^{m-1}\ker(f_i).$$

我们来验证以下三个断言.

(i) $\dim(W)=n-m$;

(ii) $(F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w})\cap W=\{\mathbf{0}\}$;

(iii) W 是 $\mathcal{A}$-不变的.

断言 (i) 和 (ii) 保证 $V=(F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w})\oplus W$. 而断言 (iii) 保证归纳假设可以应用到 W 上.

验证断言*(i)*. 我们首先看 f_k 在基底

$$\mathbf{w},\mathcal{A}(\mathbf{w}),\ldots,\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}),\epsilon_{m+1},\ldots,\epsilon_n \tag{1}$$

下的矩阵, $k=0,1,\dots,m-1$. 线性函数 $f_0=f$ 在基底 (1) 和 1 下的矩阵是

$$
\begin{aligned}
&=(f(\mathbf{w}),\dots,f(\mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w})),f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})),f(\epsilon_{m+1}),\dots,f(\epsilon_n))\\
&=(1)(\underbrace{0,\dots,0}_{m-1},1,\underbrace{0,\dots 0}_{n-m})=(\underbrace{0,\dots,0}_{m-1},1,\underbrace{0,\dots 0}_{n-m})=:B_0
\end{aligned}
$$

而 f_k 在基底 (1) 下的矩阵是

$$
\begin{aligned}
&=(f(\mathcal{A}^{k}(\mathbf{w})),\dots,f(\mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w})),f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w})),\\
&\quad f(\mathcal{A}^{m}(\mathbf{w})),\dots,f(\mathcal{A}^{m-1+k}(\mathbf{w})),f(\mathcal{A}^{k}(\epsilon_{m+1})),\dots,f(\mathcal{A}^{k}(\epsilon_n)))\\
&=(1)(\underbrace{0,\dots,0}_{m-k-1},1,\underbrace{*,\dots *}_{n-m+k})=(\underbrace{0,\dots,0}_{m-k-1},1,\underbrace{*,\dots *}_{n-m+k}):=B_k,
\end{aligned}
$$

$k=1,2,\dots,m-1$. 设 $\mathbf{x}\in V$ 在基底 (1) 下的的坐标是 $(x_1,\dots,x_n)^t$. 则

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_0(\mathbf{x})\\ f_1(\mathbf{x})\\ \vdots\\ f_{m-1}(\mathbf{x})\end{pmatrix}
&=\begin{pmatrix} B_0\\ B_1\\ \vdots\\ B_{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\\
&=\underbrace{\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & *\\
0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & *\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
1 & \cdots & * & * & * & \cdots & *
\end{pmatrix}_{m\times n}}_{C}
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

于是, $\cap_{i=0}^{m-1}\ker(f_i)$ 的维数等于以 C 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间的维数, 即 $n-\mathrm{rank}(C)=n-m$.

验证断言 *(ii)*. 设 $\mathbf{x}\in(F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{w})\cap W$ 且 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$. 则存在 $p\in\{0,1,\ldots,m-1\}$, $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in F$, $\alpha_p\neq 0$, 使得

$$\mathbf{x}=\alpha_0\mathbf{w}+\alpha_1\mathcal{A}(\mathbf{w})+\cdots+\alpha_p\mathcal{A}^p(\mathbf{w}).$$

则

$$\begin{aligned}
0 &= f_{m-1-p}(\mathbf{x})\\
&= \alpha_0 f_{m-1-p}(\mathbf{w})+\cdots+\alpha_{p-1}f_{m-1-p}(\mathcal{A}^{p-1}(\mathbf{w}))+\alpha_p f_{m-1-p}(\mathcal{A}^p(\mathbf{w}))\\
&\qquad (f_{m-1-p}\ \text{线性})\\
&= \alpha_0 f(\mathcal{A}^{m-1-p}(\mathbf{w}))+\cdots+\alpha_{p-1}f(\mathcal{A}^{m-2}(\mathbf{w}))+\alpha_p f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{w}))\\
&\qquad (f_0,\ldots,f_p\ \text{和}\ \mathbf{w}\ \text{的定义})\\
&= \alpha_p.
\end{aligned}$$

矛盾. 断言 (ii) 成立.

验证断言 *(iii)*. 设 $\mathbf{x}\in W$. 则对任意 $k\in\{0,1,\ldots,m-1\}$,

$$f_k(\mathbf{x})=f(\mathcal{A}^k(\mathbf{x}))=0.$$

设 $\mathbf{y}=\mathcal{A}(\mathbf{x})$. 则对任意 $k\in\{0,1,\ldots,m-2\}$,

$$f_k(\mathbf{y})=f_k(\mathcal{A}(\mathbf{x}))=f_{k+1}(\mathbf{x})=0.$$

还需要验证 $f_{m-1}(\mathbf{y})=0$. 由 m 的极大性可知,

$$\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{x})\leq m.$$

根据第二章第四讲命题 9.2 (iii), 存在 $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1} \in F$, 使得

$$\mathcal{A}^m(\mathbf{x}) = \beta_0 \mathbf{x} + \beta_1 \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \cdots + \beta_{m-1} \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x}).$$

于是

$$\begin{aligned}
f_{m-1}(\mathbf{y}) &= f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{y})) \quad (f_{m-1} \text{ 的定义}) \\
&= f(\mathcal{A}^m(\mathbf{x})) \quad (\mathbf{y} \text{ 的定义}) \\
&= f(\beta_0 \mathbf{x} + \beta_1 \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \cdots + \beta_{m-1} \mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x})) \quad (\text{见上式}) \\
&= \beta_0 f(\mathbf{x}) + \beta_1 f(\mathcal{A}(\mathbf{x})) + \cdots + \beta_{m-1} f(\mathcal{A}^{m-1}(\mathbf{x})) \quad (f \text{ 线性}) \\
&= \beta_0 f_0(\mathbf{x}) + \beta_1 f_1(\mathbf{x}) + \cdots + \beta_{m-1} f_{m-1}(\mathbf{x}) \\
&\qquad (f_0, f_1, \ldots, f_{m-1} \text{ 的定义}) \\
&= 0 \quad (\mathbf{x} \in W).
\end{aligned}$$

于是 $\mathbf{y} \in W$. 断言 (iii) 成立. $\square$

定理 9.8 设 $\dim(V) = n$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 V 是 $\mathcal{A}$-循环的当且仅当 $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_A$.

证明. 设 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$. 则, $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \ldots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 是 V 的一组基. 则存在 $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \in F$ 使得

$$\mathcal{A}^n(\mathbf{v}) = -f_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v}) - \cdots - f_1 \mathcal{A}(\mathbf{v}) - f_0 \mathbf{v}.$$

令 $f(t) = t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \cdots + f_1 t + f_0 \in F[t]$. 则 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

断言. $\mu_{\mathcal{A}}(t)=f(t)$.

断言的证明. 设 $\mathbf{x}$ 是 V 中任何向量. 存在 $p\in F[t]$ 使得 $\mathbf{x}=p(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ (命题 9.2 (i)). 则

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x})=f(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\mathbf{v})=p(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\mathbf{v})=p(\mathcal{A})(\mathbf{0})=\mathbf{0}.$$

由 $\mathbf{x}$ 的任意性可知, $f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$. 于是, $\mu_{\mathcal{A}}|f$ (第二章第二讲引理 4.2). 假设 $\deg(\mu_{\mathcal{A}})=d<n$. 设

$$\mu_{\mathcal{A}}(t)=t^d+\alpha_{d-1}t^{d-1}+\cdots+\alpha_0,\quad \text{其中 } \alpha_{d-1},\ldots,\alpha_0\in F.$$

由 $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{O}$ 得出 $\mathcal{A}^d(\mathbf{v})+\alpha_{d-1}\mathcal{A}^{d-1}(\mathbf{v})+\cdots+\alpha_0\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 但这与 $\mathbf{v},\mathcal{A}(\mathbf{v}),\ldots,\mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 是 V 的一组基相矛盾. 故 $\deg(\mu_{\mathcal{A}})\geq n$. 由此和 $\mu_{\mathcal{A}}|f$ 可推出 $\mu_{\mathcal{A}}=f$. 断言成立.

我们来计算 $\mathcal{A}$ 在基底 $\mathbf{v},\mathcal{A}(\mathbf{v}),\ldots,\mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 下的矩阵

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}(\mathbf{v}),\mathcal{A}^2(\mathbf{v}),\ldots,\mathcal{A}^n(\mathbf{v}))\\ =&(\mathbf{v},\mathcal{A}(\mathbf{v}),\ldots,\mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v}))\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&-f_0\\1&0&0&\cdots&0&-f_1\\0&1&0&\cdots&0&-f_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-f_{n-2}\\0&0&0&\cdots&1&-f_{n-1}\end{pmatrix}}_{A}.\end{aligned}$$

直接计算得 $\chi_{\mathcal{A}}(t)=\chi_A(t)=f(t)$ (见注记 9.9. 故 $\mu_{\mathcal{A}}=\chi_{\mathcal{A}}$.

反之, 因为 $\mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}$, 所以 $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) = n$. 由科斯特利金第二卷第 56 页习题 8 (ii), 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mu_{\mathcal{A},\mathbf{v}} = \mu_{\mathcal{A}}$. 由此得出, $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), \ldots, \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 是 V 的一组基. 故 $V = F[\mathcal{A}]\cdot\mathbf{v}$. □

□

注解 9.9 以下是计算 $\chi_A(t)$ 的过程:

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & f_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & f_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t & f_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t + f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

我们用数学归纳法来证明

$$\chi_A(t) = t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \cdots + f_1 t + f_0.$$

当 $n = 1$ 时, $\chi_A(t) = t + f_0$. 结论成立. 设 $n > 1$ 且结论对

$n-1$ 成立. 把上述行列式按第一行展开得

$$\chi_A(t) = t\det\begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & f_1 \\ -1 & t & \cdots & 0 & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & f_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+f_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$+(-1)^{n-1}f_0\det\begin{pmatrix} -1 & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & t & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

由归纳假设可知

$$\chi_A(t) = t(t^{n-1}+f_{n-1}t^{n-2}+\cdots+f_1)+f_0 = f(t). \quad \square$$

由这一结论可知, 任何一个首一且次数为正的多项式都是某个矩阵的特征多项式.

定理 9.10 *(Hamilton-Cayley 定理的加强版)* 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则

(i) $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, 即 $\mu_{\mathcal{A}}(t)|\chi_{\mathcal{A}}(t)$;

(ii) $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 的因子.

证明. 由循环子空间分解定理,

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell,$$

其中 $U_1, \ldots, U_\ell$ 是非零的 $\mathcal{A}$-循环子空间. 特别地, $U_1, \ldots, U_\ell$ 是 $\mathcal{A}$-不变的(第二章第四讲命题 9.2 (ii)). 令

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{U_i}, \quad \mu_i = \mu_{\mathcal{A}_i}, \quad \chi_i = \chi_{\mathcal{A}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, \ell.$$

根据第二章第三讲定理 5.9, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_\ell \end{pmatrix}.$$

且

$$\mu_{\mathcal{A}} = \mathrm{lcm}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell).$$

由第二章第三讲例 7.14,

$$\chi_{\mathcal{A}} = \chi_1 \chi_2 \cdots \chi_\ell.$$

由第二章第四讲引理 9.5, $\mu_i = \chi_i$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$. 故上式可以写为:

$$\chi_{\mathcal{A}} = \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_\ell.$$

于是, $\mu_{\mathcal{A}}(t) | \chi_{\mathcal{A}}(t)$. (i) 成立. 设 p 是 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的一个不可约因子. 则 p 整除某个 μ_i (见上学期第五章第二讲引理 3.4). 由此可知, $p | \mu_{\mathcal{A}}$ □

注解 9.11 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ 是 $\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解. 则 $\chi_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解是

$$\chi_{\mathcal{A}} = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s},$$

其中 $m_1 \leq n_1, \ldots, m_s \leq n_s$ 且 $n_1 + \cdots + n_s = n$.

推论 9.12 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 则

(i) $\mu_A(t) | \chi_A(t)$;

(ii) $\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_A(t)$ 的因子.

例 9.13 利用上述定理, 我们有以下结论.

(i) 对合算子在某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & -E_\ell \end{pmatrix}.$$

(ii) 幂零算子的特征根都等于零, 但非零的幂零算子不可能对角化.

例 9.14 设

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}.$$

计算 A^{66}.

解. 计算得 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 + t$. 由 *Hamilton-Cayley* 定理, $A^2 = -A$. 于是,

$$\begin{aligned} A^{66} &= (A^2)^{33} = -A^{33} = -AA^{32} = -AA^{16} \\ &= -AA^8 = -AA^4 = -AA^2 = (-A)(-A) = A^2 = -A. \end{aligned}$$

我们得到

$$A^{66} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}. \quad \square$$

另解. 由对角化可知,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP,$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}A^{66}P \Longrightarrow A^{66} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}. \quad \square$$

引理 9.15 *(不可分子空间判定准则)* 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则 U 是 $\mathcal{A}$-不可分的当且仅当下述两个条件都成立.

(i) U *是* $\mathcal{A}$*-循环子空间;*

(ii) $\mu_{\mathcal{A}_U}$ *是* $F[t]$ *中某个不可约多项式的幂次.*

证明. 设 U 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间. 则 U 是 $\mathcal{A}$-子空间. 根据定理 9.7, U 是若干 A_U-循环子空间的直和, 也是若干 $\mathcal{A}$-循环子空间的直和. 因为 U 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间, 所以直和项只有一个, 即 U 是 $\mathcal{A}$-循环的. 进而, $\mu_{\mathcal{A}_U}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次. 否则, 由补充材料中推论 1.2 或核核分解定理可知, U 关于 $\mathcal{A}_U$ 的核核分解的直和项不止一个, 与 U 是 $\mathcal{A}$-不可分子空间矛盾.

反之, 设条件 (i) 和 (ii) 满足. 设 $\mu_{\mathcal{A}_U} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$ 不可约, $m > 0$. 因为 U 是 $\mathcal{A}$-循环子空间, 所以 U 是 $\mathcal{A}_U$-循环空间. 由第二章第四讲引理 9.5,

$$\dim(U) = m \deg(p).$$

假设 $U = U_1 \oplus U_2$, 其中 U_1, U_2 是正维数的 $\mathcal{A}$-子空间. 则它们也是 $\mathcal{A}_U$-子空间. 则 $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}} | p^m$ 且 $\mu_{\mathcal{A}_{U_2}} | p^m$ (第二章第二讲引理 4.2). 但

$$p^m = \operatorname{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}, \mu_{\mathcal{A}_{U_2}})$$

(第二章第三讲引理 5.7). 于是, $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}, \mu_{\mathcal{A}_{U_2}}$ 至少有一个等于 p^m. 不妨设 $\mu_{\mathcal{A}_{U_1}} = p^m$, 根据 Hamilton-Cayley 定理, $\chi_{\mathcal{A}_{U_1}}$

有因子 p^k, 其中 $k \geq m$. 于是,

$$\dim(U_1) \geq m \deg(p) = \dim(U).$$

矛盾. □

定理 9.16 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则存在 $\mathcal{A}$-不可分子空间 $W_1, \ldots, W_k$ 使得

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

且 W_i 是 $\mathcal{A}$-循环的, $\mu_{\mathcal{A}_{W_i}}$ 是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次, $i = 1, 2, \ldots, k$.

证明. 结合引理 10.6 和第二章第三讲命题 6.2 即可. □

例 9.17 设 $\mathcal{D}$ 是 $R[x]^{(n)}$ 上的导数算子. 则 $\mu_{\mathcal{D}} = t^n$ 且 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$-循环的(第二章第四讲定理 9.11). 于是, $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 $\mathcal{D}$-不可分的. □

10 复数域上的 Jordan 标准型（存在性）

记号: 在本节中 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间.

引理 10.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda)^n$. 此时, $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的

矩阵是

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{2}$$

证明. 设 $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$. 则 V 是 $\mathcal{A}$-循环的(第二章第四讲定理 9.11, 即循环空间判别法). 由引理 9.15 可知, V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 反之, 设 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 同样的引理蕴含 $\mu_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathbb{C}[t]$ 中某个首一的不可约多项式的幂次. 由代数学基本定理, $\mu_{\mathcal{A}}$=$(t-\lambda)^m$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 且 $m \in \mathbb{Z}^+$. 该引理还蕴含 V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 于是 m=n (第二章第四讲定理 9.11).

设 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的, $V = F[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ 且 $\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$.

断言. 令 $\epsilon_j = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-j}(\mathbf{v})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, 是 V 的一组基.

断言的证明. 只要证明 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 线性无关即可.

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ 使得

$$\alpha_1\epsilon_1 + \cdots + \alpha_n\epsilon_n = \mathbf{0}.$$

则

$$\alpha_1(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-1}(\mathbf{v}) + \cdots + \alpha_{n-1}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathbf{v}) + \alpha_n\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

令 $f(t)=\alpha_1(t-\lambda)^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}(t-\lambda)+\alpha_n$. 则 $f(\mathcal{A})(\mathbf{v})=\mathbf{0}$. 设 $\mathbf{x}\in V$. 则存在 $g(t)\in\mathbb{C}[t]$ 使得 $\mathbf{x}=g(\mathcal{A})(\mathbf{v})$ (第二章第四讲命题 9.2 (i)). 于是,

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x})=f(\mathcal{A})g(\mathcal{A})(\mathbf{v})=g(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\mathbf{v})=g(\mathcal{A})(\mathbf{0})=\mathbf{0}.$$

由 $\mathbf{x}$ 的任意性可知, $f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$. 因为 $\deg(f)<n$, 所以 $f(t)=0$. 通过分析 f 的次数, 我们得到

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0.$$

断言成立.

下面我们计算 $\mathcal{A}$ 在 V 的基底 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 下的矩阵. 设 $j=2,\ldots,n$. 则

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\epsilon_j)&=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}+\lambda\mathcal{E})(\epsilon_j)=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})((\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-j}(\mathbf{v}))+\lambda\mathcal{E}(\epsilon_j)\\&=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-j+1}(\mathbf{v})+\lambda\epsilon_j=\epsilon_{j-1}+\lambda\epsilon_j.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\epsilon_1)&=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}+\lambda\mathcal{E})(\epsilon_1)=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})((\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\mathbf{v}))+\lambda\mathcal{E}(\epsilon_1)\\&=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n}(\mathbf{v})+\lambda\epsilon_1=\lambda\epsilon_1.\end{aligned}$$

于是

$$\mathcal{A}(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}. \quad \square.$$

我们称 (2) 中的矩阵为 关于 λ 的 n 阶 *Jordan* 块.