循环子空间的应用

2022年5月18日 6:56

记号：V 是域 F 上 n 维线性空间

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$、

$\boxed{\text{循环子空间分解定理：} V \text{ 是有限个 } \mathcal{A}\text{-循环子空间的直和}}$

$\boxed{\text{循环空间判别准则：} V \text{ 是 } \mathcal{A}\text{-循环的} \Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}}}$

注：任何 $F[t]$ 中首一多项式都是某个矩阵的特征多项式

证：设

$$f = t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \cdots + f_1 t + f_0$$

其中 $f_i \in F$，

设 $tE - A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & f_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & f_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & f_2 \\ & & & \vdots & & \\ & & & & t & f_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & & -1 & t+f_{n-1} \end{pmatrix}$

$f = \det(tE - A)$

对 n 归纳，$n=1$ $\det(tE-A) = \det(t+f_0)$

$= t\,tf_0$

$f = t\,tf_0 \Rightarrow n=1$ 结论成立

设 $n-1$ 时结论成立，考虑 n 时

按第一行展开 $tE-A$

$$\det(tE-A) = t\det\begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & f_1 \\ -1 & t & \cdots & 0 & f_2 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+f_{n-1} \end{vmatrix}_{(n-1)} + f_0(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= \underbrace{t\,(t^{n-1}+tf_{n-1}t^{n-2}+\cdots+tf_1)}_{\text{归纳假设}} + f_0$$

$$= t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \cdots + tf_1 t + tf_0 = f$$ ∎

toy example

Cayley–Hamilton 定理

设 $A \in \mathcal{L}(V)$

(i) $\chi_A(A) = O$，即 $\mu_A(t) \mid \chi_A(t)$，

(ii)（加强版）

$\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约

因子都是 $\mu_A(t)$ 不可约因子

证：由循环子空间分解定理

$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ 以 $\cdots$

其中 U_i 是 A 一循环子空间，那么

设 $A_i = A|_{U_i}$ $\mu_i = \mu_{A|_{U_i}}$

$i=1,2,\cdots,l$

$\chi_i = \chi_{A|_{U_i}}$

由不变子空间部分的结论

在 V 的某组基下，A 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l \end{pmatrix}_{n\times n}$$

其 A_i 是 A_i 在 U_i 的某组基下的矩阵

$\mu_A(t) = \mu_A(t) = \operatorname{lcm}(\mu_1, \cdots, \mu_l)$

$\chi_A(t) = \chi_A(t) = \chi_1 \chi_2 \cdots \chi_l$

由 U_i 是 A_i 一循环子空间，循环空间判别准则 $\mu_i = \chi_i$ $i=1,2,\cdots,l$

$\mu_A(t) = \underline{\operatorname{lcm}(\mu_1, \cdots, \mu_l)}$

$\chi_A(t) = \underline{\mu_1 \cdots \mu_l}$

$\Rightarrow \mu_A(t) \mid \chi_A(t)$

$\Rightarrow \chi_A(A)=0$

结论成立

由最小多项式和不可约因子的关系可知

$\mu_A(t)$、$\chi_A(t)$ 有共同的不可约因子 (的成立)

注：① $\deg \mu_A(t) \le n = \deg \chi_A(t)$

$\deg \mu_A(t) = n \Leftrightarrow$ V 是 A-循环的、

② $\chi_A(t)$ 在 F 中的根与 $\mu_A(t)$ 在 F 中的根相同

③ 设 $\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中不可约分解为

$\chi_A(t)=p_1^{n_1}\cdots p_s^{n_s}$

其中 $p_1,\cdots,p_s \in F[t]\setminus F$ 不可约、首一、两两互素，

$n_1,\cdots,n_s \in \mathbb{Z}^+$

则 $\mu_A(t)=p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}$，其中

$0<m_j\le n_j$，$j=1,\cdots,s$

推论：设 $A \in M_n(F)$

则：① $\chi_A(A) = O$

即 $\mu_A(t) \mid \chi_A(t)$

(ii) $\mu_A(t)$，$\chi_A(t)$ 有共同不可约因子

证：把 A 看成线性变换

$\mathcal{A}: F^n \longrightarrow F^n$

$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$

~~再~~ 后 ~~第~~ 3 形成的 C. H. 定理

例 设 $\mathrm{char}(F) \neq 2$，$\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$.

证明：$\mathcal{A}$ 可对角化

且 $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵是 $\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & -E_l \end{pmatrix}$

证：设 $f(t) = t^2 - 1$，则

$\mathcal{A}^2 = \mathcal{E} \Rightarrow f(\mathcal{A}) = O$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}}(t) \mid f(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$

于是 $\mu_{\mathcal{A}}(t) = \begin{cases} t-1 & \text{— ①} \\ t+1 & \text{— ②} \\ (t-1)(t+1) & \text{— ③} \end{cases}$

情形1 $\mathcal{A}=\mathcal{E}$ ✓

情形2 $\mathcal{A}=-\mathcal{E}$

情形3. $m_{\mathcal{A}}(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)$

∵ $1\neq -1$ ∴ 由对角化判别法Ⅳ. $\mathcal{A}$ 可对角化

由 C-H 定理 $\mathcal{A}$ 的特征根是 ± 1

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是 $\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & -E_l \end{pmatrix}$.

例 设 $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}$

求 A^{66}

解 (方法1) $\underline{\chi_A(\lambda)=\lambda^2+\lambda}$

$\chi_A(A)=A^2+A=O$

$\Rightarrow \boxed{A^2=-A}$

$A^{66}=(A^2)^{33}=(-A)^{33}$

$=-A^{33}=-A\,A^{32}$

$=-A(A^2)^{16}=-A(-A)^{16}$

$= -AA^{65} = \cdots = -AA^{2}$

$= (-A)(-A) = A^{2} = -A$

（方法2） 可计算

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{F})$$

使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{66} = (P^{-1}AP)^{66}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}A^{66}P$$

$$A^{66} = \underbrace{P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}}_{= -A} \qquad 用$$

注：$A \in \mathcal{L}(V)$ $\quad A^{2022} \longrightarrow$

$A: V \longrightarrow V$

不动点：$\vec{x} \in V$ $\quad A(\vec{x}) = \vec{x}$

周期点：$\vec{x} \in V$ $\quad \exists k \in \mathbb{Z}^{+}$

$A^{k}(\vec{x}) = \vec{x}$

移走点 $\vec{x}_0 \in V$ $\quad \exists \vec{x}_1 \in V$

$A(\vec{x}_1) = \vec{x}_0$

$\exists \vec{x}_2 \in V$ $\quad A(\vec{x}_2) = \vec{x}_1$

$\vdots$

$$\vec{x}_0 \xleftarrow{A} \vec{x}_1 \xleftarrow{A} \vec{x}_2 \leftarrow \cdots$$

吸引子，$\vec{x} \in \bigcap_{k=1} \mathrm{im}(A^k)$

$\mathrm{im}(A) \supset \mathrm{im}(A^2) \supset \cdots \supset \mathrm{im}(A^k)$

$= \mathrm{im}(A^{k+1}) = \cdots$

引理（不可分子空间判别准则）

设 $A \in \mathcal{L}(V)$，U 是 A-子空间

则

U 是 A-不可分的

$\Longleftrightarrow$ (i) U 是 A-循环的

(ii) $\mu_{A|_U}$ 是 $F[x]$ 中某个不可约多项式的幂次。

证："$\Rightarrow$"

假设 U 不是 A-循环的

根据循环子空间分解定理

$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_l$

其中 U_i 都是 A-循环的，且 $l \geq$ 非平凡

与 U 是 A-不可分的矛盾

假设 $\mu_{A|_U}(x)$ 不是某个不可约多项式的幂次，则

$\mu_{A|_U}(x) = pq$

，满足

其中 $p\in F[t]$、$q\in F[t]$，且
且 $\gcd(p, q)=1$

由核分解定理

$$U=\underbrace{\ker(p(A_U))}_{A\text{-不变}}\oplus\underbrace{\ker(q(A_U))}_{A\text{-不变}}$$

下面说明 $\ker(p(A_U))\neq\{\vec{0}\}$

假设 $\ker(p(A_U))=\{\vec{0}\}$.

$$U=\ker(q(A_U))$$

$$\Rightarrow\quad q(A_U)=O_U$$

$\mu_{A_U}(t)\mid q(t)$ 矛盾

$\boxed{\deg\mu_{A_U}>\deg q}$

于是与 U 是 A-不可分矛盾

"$\Longleftarrow$" 设 $\mu_{A_U}(t)=p^m$，其中

$p\in F[t]\setminus F$ 不可约.

$\because$ U 是 A-循环的

$\therefore$ $\dim U=\deg(p^m)=m\deg p$

假设 $U=U_1\oplus U_2$，其中

U_1 和 U_2 是 A-不变子空间 $\neq\{\vec{0}\}$

设 $A_1 = A|_{U_1}$，$A_2 = A|_{U_2}$

$\mu_1 = \mu_{A|_{U_1}}$，$\mu_2 = \mu_{A|_{U_2}}$

$\because \mu_{A|_U}(A|_U) = 0$

$\therefore \mu_{A|_U}(A_1) = 0$

$\therefore \mu_1(t) \mid \mu_{A|_U}(t)$，$\mu_2(t) \mid \mu_{A|_U}(t)$

于是 $\mu_1(t) = p^{m_1}$，$\mu_2(t) = p^{m_2}$

且 $m_1 \leq m$，$m_2 \leq m$

$$p^m = \mu_{A|_U}(t) = \operatorname{lcm}(\mu_1, \mu_2) = p^{\max(m_1, m_2)}$$

$m = \max(m_1, m_2)$

不妨设 $m = m_1$

$\because \mu_1 \mid \chi_1 = \chi_{A_1}(t)$ [C-H定理]

$\deg \mu_1 \leq \deg \chi_1 = \dim U_1$

$\parallel$

$m \deg p = \dim U \Rightarrow \dim U \leq \dim U_1$

$U = U_1 \Rightarrow U_2 = \{\vec{0}\} \rightarrow\leftarrow$

$\square$

例：$D: \mathbb{R}[x]^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(n)}$

$f \longmapsto f'$

$D^n = 0$，$D^{n-1} \neq 0$

$\mu(t) = t^n$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_D(t) = t^n}$$

$$\mathbb{R}[x]^{(n)} = \mathbb{R}[D] \cdot x^{n-1}$$

由上述判别法

$\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 D-不可分的

定理：设 $A \in \mathcal{L}(V)$

$$V = \underline{W_1} \oplus \cdots \oplus \underline{W_s}$$

其中 W_j 是 A-不可分

是 A-循环

$\mu_{A|_{W_j}}$ 是某个 $F[t]$ 不可约多项式的幂次。

证：利用上述判别法和以前证明的结论，V 是有限个 A-不可分子空间的直和

§10. 复数域上的 Jordan 标准型（存在性）

记号：在本节中 $F = \mathbb{C}$

引理　设 $A \in \mathcal{L}(V)$，则 A 是

不可分解 $\Longleftrightarrow$ $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ 使得

$\mu_A = (t-\lambda)^n$

此时 A 在 V 的基组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n} =: J_n(\lambda)$$

"称 $J_n(\lambda)$ 是关于 λ 的 n 阶 Jordan 块"

证：V 是 A 不可分 的

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} V \text{ 是 } A \text{ 循环的} \Longleftrightarrow \mu_A = \chi_A \\ \mu_A = (t-\lambda)^m \end{cases}$

$\Updownarrow$ CH

$\deg(\mu_A) = n$

[代数学基本定理]

$\Longleftrightarrow$ $\mu_A = (t-\lambda)^n$.

例如：$D: \mathbb{R}[x]^{(n)} \to \mathbb{R}[x]^{(n)}$

基底：$1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$\boxed{\vec{v}}, A(\vec{v}), \cdots, A^{n-1}(\vec{v})$

$D(* \quad * \quad \cdots \quad *)$

$= (* \quad * \quad \cdots \quad *) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$\parallel$

$J_n(0)$

设 $V = F[A]\cdot \vec{v}$

?

设 $V=F[A]\cdot\vec{v}$

令 $\vec{\varepsilon_j}=(A-\lambda E)^{n-j}(\vec{v})$

$j=1,2,\cdots,n$

验证 $\vec{\varepsilon_1},\cdots\vec{\varepsilon_n}$ 是 V 的一组基

$\because \dim V_n$ $\therefore$ 只要验证

$\vec{\varepsilon_1},\cdots\vec{\varepsilon_n}$ 是线性无关的

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{C}$，使得

$$\alpha_1\vec{\varepsilon_1}+\cdots+\alpha_n\vec{\varepsilon_n}=\vec{0}$$

$$\underbrace{\alpha_1(A-\lambda E)^{n-1}(\vec{v})}+\underbrace{\alpha_2(A-\lambda E)^{n-2}(\vec{v})}+\cdots+\underbrace{\alpha_n(A-\lambda E)^{n-n}(\vec{v})}=\vec{0}$$

令 $f(t)=\alpha_1(t-\lambda)^{n-1}+\alpha_2(t-\lambda)^{n-2}+\cdots+\alpha_n(t-\lambda)^0$

则 $f(A)(\vec{v})=\vec{0}$

于是 $\forall k\in\mathbb{N}$

$$f(A)(A^k(\vec{v}))=A^kf(A)(\vec{v})=\vec{0}$$

故 $f(A)$ 零化 $\vec{v},A(\vec{v}),\cdots A^{n-1}(\vec{v})$

$\Rightarrow f(A)=0$

$\Rightarrow \mu_A(t) \mid f(t)$

但 $\deg f(t) < n$

$\Rightarrow f(t) = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_n = 0$

$\Rightarrow \vec{\varepsilon_1}, \cdots \vec{\varepsilon_n}$ 线性无关

$j \in \{2, 3, \cdots n\}$

$$A(\vec{\varepsilon_j}) = A(A-\lambda\mathcal{E})^{n-j}(\vec{v})$$

$$= (A-\lambda\mathcal{E}+\lambda\mathcal{E})(A-\lambda\mathcal{E})^{n-j}(\vec{v})$$

$$= (A-\lambda\mathcal{E})^{n-j+1}(\vec{v}) + \lambda\mathcal{E}(A-\lambda)^{n-j}(\vec{v})$$

$$= (A-\lambda\mathcal{E})^{n-(j-1)}(\vec{v}) + \lambda(A-\lambda)^{n-j}(\vec{v})$$

$$= \vec{\varepsilon}_{j-1} + \lambda\vec{\varepsilon_j}$$

$j = 1$

$$A(\vec{\varepsilon_1}) = A(A-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\vec{v})$$

$$= (A-\lambda\mathcal{E}+\lambda\mathcal{E})(A-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\vec{v})$$

$$= (A-\lambda\mathcal{E})^{n}(\vec{v}) + \lambda(A-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\vec{v})$$

$$= \mu_A(A)(\vec{v}) + \lambda\vec{\varepsilon_1}$$

$$= \lambda\vec{\varepsilon_1}$$

$$\mathcal{A}(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \cdots \vec{\varepsilon_n})$$
$$= (\mathcal{A}(\vec{\varepsilon_1}), \mathcal{A}(\vec{\varepsilon_2}), \cdots \mathcal{A}(\vec{\varepsilon_n}))$$
$$= (\lambda \vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_1} + \lambda \vec{\varepsilon_2}, \cdots \vec{\varepsilon_{n-1}} + \lambda \vec{\varepsilon_n})$$
$$= (\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \cdots \vec{\varepsilon_n}) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}}_{} = J_n(\lambda). \quad \square$$