循环子空间分解

2022年5月15日 20:34

回忆：记号 V 是域 F 上的 n 维线性空间

设 $A \in L(V)$，$\vec{v} \in V$

定义：$F[A]\cdot\vec{v} = \langle \vec{v}, A(\vec{v}), \cdots, A^k(\vec{v}), \cdots \rangle \subset V$

称为由 $\vec{v}$ 生成的 A-循环子空间。

命题

(i) $F[A]\cdot\vec{v} = \{ f(A)(\vec{v}) \mid f(t) \in F[t] \}$

证：$\vec{x} \in F[A]\cdot\vec{v}$

$\vec{x} = \alpha_0\vec{v} + \alpha_1 A(\vec{v}) + \cdots + \alpha_k A^k(\vec{v})$, $\alpha_i \in F$

$= (\alpha_0 \mathcal{E} + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_k A^k)(\vec{v})$

令 $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_k t^k$

则 $\vec{x} = f(A)(\vec{v})$

$\Rightarrow$ 左 $\subset$ 右

设 $\vec{y} \in \{ f(A)(\vec{v}) \mid f \in F[t] \}$

则存在 $f(t) = \beta_m t^m + \cdots + \beta_1 t + \beta_0$, $\beta_i \in F$

使得 $\vec{y} = f(A)(\vec{v})$

$= (\beta_m A^m + \cdots + \beta_1 A + \beta_0 \mathcal{E})(\vec{v})$

$= \beta_m A^m(\vec{v}) + \cdots + \beta_1 A(\vec{v}) + \beta_0 \vec{v}$

$\in F[A]\cdot\vec{v}$

右 ⊂ 左 ☒

(ii) $F[A]\cdot\vec{v}$ 是 A—不变的

设 $\vec{x} \in F[A]\cdot\vec{v}$

由(i) $\exists f \in F[t]$ 使得

$\vec{x} = f(A)(\vec{v})$

$A(\vec{x}) = [Af(A)](\vec{v})$

令 $g = t\cdot f(t)$

$A(\vec{x}) = g(A)(\vec{v})$

由(i) $A(\vec{x}) \in F[A]\cdot\vec{v}$.

(iii) 设 $d = \deg m_{A,\vec{v}}$

则 $\dim(F[A]\cdot\vec{v}) = d$

证: 我们证

$\vec{v}, A(\vec{v}), \cdots, A^{d-1}(\vec{v})$

是 $F[A]\cdot\vec{v}$ 的一组基

设 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{d-1} \in F$

$\alpha_0\vec{v} + \alpha_1 A(\vec{v}) + \cdots + \alpha_{d-1}A^{d-1}(\vec{v})$

$= \vec{0}$

令 $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{d-1}t^{d-1}$

则 $f(A)(\vec{v}) = \vec{0}$

则 $f(A)(\vec{v}) = \vec{0}$

则 $\mu_{A,\vec{v}}(t) \mid f(t)$

但 $\deg(f) \le d-1$

$\Rightarrow f(t) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{d-1} = 0$

设 $\vec{x} \in F[A]\cdot\vec{v}$，由定义

$\exists\, g \in F[t]$ 使得

$$\vec{x} = g(A)(\vec{v})$$

由多项式除法

$$g(t) = q(t)\,\mu_{A,\vec{v}}(t) + \underbrace{\beta_{d-1}t^{d-1} + \cdots + \beta_1 t + \beta_0}_{r(t)}, \quad \beta_j \in F$$

$\vec{x} = g(A)(\vec{v})$

$$= q(A)\boxed{\mu_{A,\vec{v}}(A)(\vec{v})} + r(A)(\vec{v})$$

$\overset{\shortparallel}{\vec{0}}$

$= r(A)(\vec{v})$

$= \beta_{d-1}\underline{A^{d-1}(\vec{v})} + \cdots + \beta_1 \underline{A(\vec{v})} + \beta_0\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{v}, A(\vec{v}), \cdots, A^{d-1}(\vec{v})$
是 $F[A]\cdot\vec{v}$ 的基

特别有，$\dim(F[A]\cdot\vec{v}) = d$ 阶

注 对于 $|F[A]| = \deg(\mu_A)$

注：对比
$$\dim(F[A]) = \deg(\mu_A).$$

例：$D:\ \mathbb{R}[x]^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(n)}$

$f(x) \longmapsto f'(x)$

验证：$\mathbb{R}[x]^{(n)} = \mathbb{R}[D]\cdot \underbrace{x^{n-1}}_{v}$

证：$D^0(x^{n-1}),\ D^1(x^{n-1}),\ D^2(x^{n-1}),\ \cdots D^{n-1}(x^{n-1})$

$\| \qquad \| \qquad \qquad \downarrow$

$x^{n-1} \quad (n-1)x^{n-2},\ (n-1)(n-2)x^{n-3} \quad (n-1)!$

因为其中元素且次数两两不同

所以，它们线性无关

于是 $\mathbb{R}[x]^{(n)} = F[D]\cdot x^{n-1}$

定理：设 $A \in L(V)$

则 V 是有限个 A-循环子空间的直和，即

$\exists\ \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_p \in V \setminus \{\vec{0}\}$

使得
$$V = F[A]\cdot\vec{v}_1 \oplus \cdots \oplus F[A]\vec{v}_p$$

证：对 $n\ (=\dim V)$ 归纳。

$n=1$ 设 $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ 则

$\dim(F[A]\cdot\vec{v}) = 1$

于是 $V=F[A]\cdot\vec{v}$ ✓

设 $n>1$ 且对维数 $<n$ 的空间结论都成立，考虑 n 的情形

如果 $\exists\,\vec{v}\in V$，使得

$$V=F[A]\cdot\vec{v}$$

则结论成立.

设上述 $\vec{v}$ 不存在

取 $\vec{v}\in V$，使得

$F[A]\cdot\vec{v}$ 的维数是

V 中 A-循环子空间中最大的

不妨设 $0<m=\dim(F[A]\cdot\vec{v})<n$

我们将构造 A-子空间 U

使得

$$V=F[A]\cdot\vec{w}\oplus U \quad (*)$$

如果 $(*)$ 成立

$$0<\dim(U)<n$$

对 A_U, U 用归纳假设

$$U=F[A_U]\cdot\vec{u}_1\oplus\cdots\oplus F[A_U]\vec{u}_s$$

其中 $\vec{u}_j\in U\setminus\{\vec{0}\}$

由限制算子 $A|_U$ 的定义

$$U = F[A]\cdot\vec{u}_1 \oplus \cdots \oplus F[A]\cdot\vec{u}_q$$

再由 (※)

$$V = F[A]\cdot\vec{v} \oplus F[A]\cdot\vec{w}_1 \oplus \cdots \oplus F[A]\cdot\vec{w}_q$$

构造 A-子空间 U

使得

$$V = F[A]\cdot\vec{v} \oplus U$$

quick and dirty.

考虑 $F[A]\cdot\vec{v}$ 的基底

$$\vec{v},\ A(\vec{v}),\ \ldots,\ A^{m-1}(\vec{v})$$

扩充为 V 的基

$$\vec{v},\ A(\vec{v}),\ \ldots,\ A^{m-1}(\vec{v}),\ \vec{\varepsilon}_{m+1}, \ldots, \vec{\varepsilon}_n$$

定义线性函数

$$f: V \longrightarrow F$$

满足

$$f(\vec{v}) = 0$$
$$f(A(\vec{v})) = 0$$
$$\vdots$$
$$f(A^{m-2}(\vec{v})) = 0$$
$$\boxed{f(A^{m-1}(\vec{v})) = 1}$$
$$f(\vec{\varepsilon}_j) = 0,\quad j = m+1, \ldots, n$$

由线性映射基本定理 II 可知

于对称

定义：$f_k = f \circ A^k$，$k = 0, 1, \cdots m-1$

$V \xrightarrow{A} V$ $[f_0 = f]$

$f \circ A \searrow \ \downarrow f$
F

令 $\boxed{U = \bigcap_{k=0}^{m-1} \ker(f_k)}$

验证：(i) $\dim U = n - m$

(ii) $(F[A] \cdot \vec{\alpha}) \cap U = \{\vec{0}\}$

(iii) U 是 A-不变的

注：的和(直)蕴含

$$V = (F[A] \cdot \vec{\alpha}) \oplus U.$$

验证(i) 对 $\forall k \in \{0, 1, \cdots m-1\}$

计算 f_k 在

$\vec{\alpha}, A(\vec{\alpha}), \cdots A^{m-1}(\vec{\alpha}), \vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots \vec{\varepsilon}_n$ 下

下的矩阵 $B_k \in F^{1 \times n}$

$f_k(\vec{\alpha}, A(\vec{\alpha}), \cdots, A^{m-k-1}(\vec{\alpha}) \cdots A^{m-1}(\vec{\alpha}), \vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots \vec{\varepsilon}_n)$

$\overset{(1)}{=} (f_k \vec{\alpha}, f_k A(\vec{\alpha}) \cdots f_k A^{m-k-1}(\vec{\alpha}), \cdots f_k A^{m-1}(\vec{\alpha}), f_k(\vec{\varepsilon}_{m+1}) \cdots f_k(\vec{\varepsilon}_n))$

$\overset{(2)}{=} (\underbrace{f A^k(\vec{\alpha}), f A^{k+1}(\vec{\alpha}) \cdots}\ \underbrace{f A^{m-1}(\vec{\alpha})}, *, *, \cdots *)$

$\overset{(3)}{=} \underbrace{(0, 0, \cdots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ m-k}}{1}, *, *, \cdots *)}_{B_k}$

于是 $\bigcap_{k=0}^{m-1} \ker(f_k)$ 对应的齐次线性

方程组 $\begin{cases} f_0 = 0 \\ \vdots \\ f \cdots = * \end{cases}$ 对应的系数

可推出 $\begin{cases} \vdots \\ f_{m-1}=0 \end{cases}$

矩阵是

$$B=\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{m-1} \end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * & * & \cdots & * \\ & & & & & & & \\ 1 & * & \cdots & & & & \cdots & * \end{pmatrix}$$

于是 $\mathrm{rank}(B)=m$

则 $B\vec{x}=\vec{0}_m$ 的解空间 U

的维数 $n-m$ [对偶定理]

待验证完

验证如. 设 $\vec{x}\in(F[A]\vec{v})\cap U$

我们要证明 $\vec{x}=\vec{0}$

设 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{m-2}, \alpha_{m-1}\in F$

使得

$$\vec{x}=\alpha_0\vec{v}+\alpha_1 A(\vec{v})+\cdots+\alpha_{m-2}A^{m-2}(\vec{v})+\underbrace{\alpha_{m-1}}_{?\,0}A^{m-1}(\vec{v})$$

$$\vec{x}\in U \Rightarrow \underset{0}{\overset{\Downarrow}{}}\quad f_0(\vec{x})=\alpha_0 f_0(\vec{v})+\alpha_1 f_0\cdot A(\vec{v})+\cdots+\alpha_{m-2}f_0 A^{m-2}(\vec{v})+\alpha_{m-1}f_0 A^{m-1}(\vec{v})$$

$f_0=f$

$$=\alpha_{m-1} \Rightarrow \alpha_{m-1}=0$$

$$\vec{x}=\alpha_0\vec{v}+\alpha_1 A(\vec{v})+\cdots+\alpha_{m-2}A^{m-2}(\vec{v})$$

两边作用 $f_i = f\circ A$，同样推理可得 $\alpha_{m-2}=0$

如法炮制，$\alpha_{m-3} = \cdots = \alpha_0 = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (2) 得证完

下面验证

U 是 A-子空间

设 $\vec{u} \in U$ 则

$\dim(F[A]\cdot\vec{u}) \le m$ [m 的极大性]

下面我们验证 $A(\vec{u}) \in U$

$\forall k \in \{0, 1, \dots, m-2\}$

$f_k(A(\vec{u})) = f_k \circ A(\vec{u})$

$= f_{k+1}(\vec{u})$

$\because \vec{u} \in U = \bigcap_{k=0}^{m-1} \ker(f_k)$

$\therefore f_{k+1}(\vec{u}) = 0$

$\Rightarrow f_k(A(\vec{u})) = 0$

最后 我们验证

$f_{m-1}(A(\vec{u})) = 0$

$f_{m-1}(A(\vec{u})) = f\circ A^{m-1}(A(\vec{u}))$

$= f\circ A^{m}(\vec{u})$

但 $\dim(F[A]\cdot\vec{u}) \le m$

$\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in F$ 使得

$\exists\ \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1} \in F$ 使得

$$A^m(\vec{u}) = \alpha_0 \vec{u} + \alpha_1 A(\vec{u}) + \cdots + \alpha_{m-1} A^{m-1}(\vec{u})$$

$$f(A^m(\vec{u})) = \alpha_0 f(\vec{u}) + \alpha_1 f(A(\vec{u})) + \cdots + \alpha_{m-1} f(A^{m-1}(\vec{u}))$$

$$= \alpha_0 \underset{0}{\underset{\parallel}{f_0(\vec{u})}} + \alpha_1 \underset{0}{\underset{\parallel}{f_1(\vec{u})}} + \cdots + \alpha_{m-1} \underset{0}{\underset{\parallel}{f_{m-1}(\vec{u})}}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow f_{m-1}(A(\vec{u})) = 0 \Rightarrow U$ 是 A-不变子空间

定义：设 $A \in L(V)$，

如果存在 $\vec{v} \in V$ 使得

$$V = F[A] \cdot \vec{v}$$

则称 V 是 A-循环的

<u>定理</u>：（循环空间判别法）

设 $A \in L(V)$ 则

V 是 A-循环的 $\Leftrightarrow \mu_A(x) = \chi_A(x)$.

证："$\Leftarrow$" 由习题课可知

$\exists\ \vec{v} \in V$ 使得

$$\boxed{\mu_A(x) = \mu_{A,\vec{v}}(x)}$$

$\because \deg \chi_A(x) = n$ 且 $\mu_A(x) = \chi_A(x)$

$\because \deg \chi_A(t) = n$ 和 $\mu_A(t) = \chi_A(t)$

$\therefore \deg(\mu_{A,\vec{v}}(t)) = n$

由本节开始的命题

$$\dim(F[A]\cdot\vec{v}) = n$$

$$\Rightarrow V = F[A]\cdot\vec{v}.$$

"$\Longrightarrow$"

设 $V = F[A]\cdot\vec{v}$

则 V 有基底

$\vec{v}, A(\vec{v}), \cdots, A^{n-1}(\vec{v})$

设 $A^n(\vec{v}) = (-\alpha_0)\vec{v} + (-\alpha_1)A(\vec{v}) + \cdots + (-\alpha_{n-1})A^{n-1}(\vec{v})$

令 $f(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0$

则 $f(A)(\vec{v}) = \vec{0}$

于是 $\forall k \in \mathbb{N}$ $f(A)(A^k\vec{v}) = A^k f(A)(\vec{v}) = \vec{0}$

故 $\forall \vec{x} \in F[A]\cdot\vec{v} = V$

$f(A)(\vec{x}) = \vec{0}$

故 $f(A) = O$.

$\Rightarrow \deg \mu_A \leq n$ $[\mu_A(t) \mid f(t)]$

$\deg \mu_{A,\vec{v}}(t) = n$ 且 $\mu_{A,\vec{v}}(t) \mid \mu_A$

于是 $\deg(\mu_A) = n$. 又因为 μ_A 时

$\Rightarrow \mu_A(t) = t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_0$

计算 A 在基底

$\vec{v}, A(\vec{v}), \cdots, A^{n-1}(\vec{v})$

下的矩阵

$$A(\vec{v}, A(\vec{v}), \cdots, A^{n-1}(\vec{v}))$$

$$= (A(\vec{v}), A^2(\vec{v}), \cdots, A^{n-1}(\vec{v}), A^n(\vec{v}))$$

$$= (\vec{v}, A(\vec{v}), \cdots, A^{n-2}(\vec{v}), A^{n-1}(\vec{v}))$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}}_{A}$$

$\chi_A(t) = |tE - A| = \mu_A(t)$. 同