

## 第二章 线性算子

### 1 不同基底下线性映射的矩阵表示

在本节中  $F$  是任意域,  $V$  和  $W$  是  $F$  上的线性空间,  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  是  $V$  的一组基,  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  是  $W$  的一组基.

#### 1.1 线性映射下的矩阵 (符号、复习和例子)

引理 1.1 设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ ,  $M \in F^{k \times \ell}$ . 则定义

$$\phi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := (\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k)).$$

则

$$\phi((\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)M) = (\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k))M.$$

证明. 设  $M = (m_{i,j})_{k \times \ell}$ . 则

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)M = \left( \sum_{i=1}^k m_{i,1} \mathbf{v}_i, \dots, \sum_{i=1}^k m_{i,\ell} \mathbf{v}_i \right).$$

于是

$$\begin{aligned}\phi((\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)M) &= \phi\left(\sum_{i=1}^k m_{i,1}\mathbf{v}_i, \dots, \sum_{i=1}^k m_{i,l}\mathbf{v}_i\right) \\ &= \left(\phi\left(\sum_{i=1}^k m_{i,1}\mathbf{v}_i\right), \dots, \phi\left(\sum_{i=1}^k m_{i,l}\mathbf{v}_i\right)\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k m_{i,1}\phi(\mathbf{v}_i), \dots, \sum_{i=1}^k m_{i,l}\phi(\mathbf{v}_i)\right) \\ &= (\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k))M. \quad \square\end{aligned}$$

设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ ,

$$\phi(\mathbf{e}_j) = a_{1,j}\epsilon_1 + \dots + a_{m,j}\epsilon_m = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix},$$

$j = 1, 2, \dots, n$ . 称

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

是  $\phi$  在基底  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  和  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  下的矩阵(表示). 当  $V$  和  $W$  的基底选定后  $\phi$  的矩阵是唯一的. 我们有

$$\phi(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)A.$$

设  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$  和  $\phi(\mathbf{x}) = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_m\epsilon_m$ . 则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**例 1.2** 设  $V = F^n$ ,  $W = F^m$ ,  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  和  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  都是标准基. 则  $\phi$  的矩阵表示是

$$(\phi(\mathbf{e}_1), \dots, \phi(\mathbf{e}_n)).$$

**例 1.3** 设  $\phi: V \rightarrow W$  由公式  $\forall \mathbf{x} \in V, \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$  给出. 则  $\phi$  在  $V$  和  $W$  的任意基底下的矩阵都是  $O_{m \times n}$ .

**例 1.4** 设  $\phi: V \rightarrow V$  由公式  $\forall \mathbf{x} \in V, \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  给出. 则  $\phi$  在  $V$  的任意基底  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵都是  $E_n$ .

**例 1.5** 设  $V$  是  $W$  的子空间,  $\phi: V \rightarrow W$  由公式  $\forall \mathbf{x} \in V, \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  给出. 取  $W$  的基是  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_m$ . 则  $\phi$  的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_n \\ O_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}.$$

**例 1.6** 线性空间  $V$  上的线性函数. 见第一章第三讲例 5.6.

**例 1.7** 设  $A \in F^{m \times n}$ ,  $\phi : F^{n \times k} \longrightarrow F^{m \times k}$  由公式  $\forall X \in F^{n \times k}$ ,  $\phi(X) = AX$  给出. 求  $\phi$  在标准基下的矩阵.

**解.** 对  $j = 1, 2, \dots, k$ ,

$$\overrightarrow{\phi(X)}^{(j)} = A\vec{X}^{(j)}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\phi(X)}^{(1)} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\phi(X)}^{(k)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & O & \cdots & O \\ O & A & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A \end{pmatrix}}_{B \quad km \times kn} \begin{pmatrix} \vec{X}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{X}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

矩阵  $B$  是  $\phi$  在标准基下的矩阵. 此时标准基的顺序如下. 设  $E_{i,j} \in F^{n \times k}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ;  $L_{i,j} \in F^{m \times k}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  分别是两个矩阵空间的标准基. 则  $F^{n \times k}$  的标准基排列是

$$E_{1,1}, E_{2,1}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{1,k}, \dots, E_{n,k}.$$

类似地,  $F^{m \times k}$  的标准基排列是

$$L_{1,1}, L_{2,1}, \dots, L_{m,1}, \dots, L_{1,k}, \dots, L_{m,k}.$$

## 1.2 线性映射在不同基底下的矩阵

**定理 1.8** 设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ . 再设  $e'_1, \dots, e'_n$  是  $V$  的另一

组基,  $\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m$  是  $W$  的另一组基, 且

$$(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P \quad \text{和} \quad (\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)Q,$$

其中  $P \in \text{GL}_n(F)$  和  $Q \in \text{GL}_m(F)$ . 如果  $\phi$  在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ;  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  下的矩阵是  $A$ , 则  $\phi$  在  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ ;  $\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m$  下的矩阵是  $Q^{-1}AP$ .

**证明.** 由  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P$  和引理 1.1 得

$$(\phi(\mathbf{e}'_1), \dots, \phi(\mathbf{e}'_n)) = (\phi(\mathbf{e}_1), \dots, \phi(\mathbf{e}_n))P.$$

于是

$$(\phi(\mathbf{e}'_1), \dots, \phi(\mathbf{e}'_n)) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)AP = (\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m)Q^{-1}AP. \quad \square$$

上述定理说明线性映射在不同基底下的矩阵有秩相同.

**定理 1.9** 设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A \in F^{m \times n}$  是  $\phi$  在符号约定基底下的矩阵. 设  $B \in F^{m \times n}$ . 则  $B$  是  $\phi$  在  $V$  和  $W$  某组基下的矩阵当且仅当  $A \sim_e B$ , 即  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

**证明.** 设  $B$  是  $\phi$  在  $V$  和  $W$  某组基下的矩阵. 根据定理 1.8, 存在  $P \in \text{GL}_n(F)$  和  $Q \in \text{GL}_m(F)$  使得  $B = Q^{-1}AP$ . 于是,  $A \sim_e B$ .

反之, 设  $A \sim_e B$ . 则存在  $M \in \text{GL}_m(F)$  和  $N \in \text{GL}_n(F)$  使得  $B = MAN$ . 令基变换:

$$(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)N, \quad (\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)M^{-1}.$$

则  $B$  是  $\phi$  在上述新基底下的矩阵.  $\square$

**定义 1.10** 设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A$  是  $\phi$  在  $V$  的一组基和  $W$  的一组基下的矩阵. 则  $\text{rank}(A)$  称为  $\phi$  的秩, 记为  $\text{rank}(\phi)$ .

**例 1.11** 计算例 1.7 中  $\phi$  的秩. 设矩阵  $B$  由例 1.7 给出. 则  $\text{rank}(\phi) = \text{rank}(B) = k\text{rank}(A)$ .

**推论 1.12** 设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$  且  $\text{rank}(\phi) = r$ . 则存在  $V$  的一组基  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$  和  $W$  的一组基  $\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m$  使得在该基下  $\phi$  的矩阵是

$$M = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

且  $r = \dim(\text{im}(\phi))$ .

**证明.** 设  $d = \dim(\ker(\phi))$ ,  $\mathbf{e}'_{n-d+1}, \dots, \mathbf{e}'_n$  是  $\ker(\phi)$  的一组基. 把它扩充为  $V$  的一组基

$$\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n-d}, \mathbf{e}'_{n-d+1}, \dots, \mathbf{e}'_n.$$

因为  $\text{im}(\phi) = \langle \phi(\mathbf{e}'_1), \dots, \phi(\mathbf{e}'_n) \rangle$  且  $\phi(\mathbf{e}'_{n-d+1}) = \dots = \phi(\mathbf{e}'_n) = \mathbf{0}_W$ , 所以

$$\text{im}(\phi) = \langle \phi(\mathbf{e}'_1), \dots, \phi(\mathbf{e}'_{n-d}) \rangle.$$

因为  $\dim(\text{im}(\phi)) = n - d$  (对偶定理), 所以

$$\epsilon'_1 = \phi(\mathbf{e}'_1), \dots, \epsilon'_{n-d} = \phi(\mathbf{e}'_{n-d})$$

是  $\text{im}(\phi)$  的一组基. 将其扩充为  $W$  的一组基

$$\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_{n-d}, \epsilon'_{n-d+1}, \dots, \epsilon'_m.$$

则  $\phi$  在上述基底下的矩阵等于  $M$ . 特别地,  $r = n - d$ .  $\square$

**例 1.13** 下面我们利用线性映射的观点重新证明打洞引理(上学期第二章第六讲引理 8.5) 设  $A \in F^{m \times n}$ . 证明存在矩阵  $L \in \text{GL}_m(F)$  和  $R \in \text{GL}_n(F)$  使得

$$LAR = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

**证明.** 根据命题 1.8, 可设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$  使得  $\phi$  在基底  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  和  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  下的矩阵等于  $A$ . 由推论 1.12, 存在  $V$  的一组基  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$  和  $W$  的一组基  $\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m$  使得在该基下  $\phi$  的矩阵是

$$M = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

设  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P$  和  $(\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)Q$ , 其中  $P \in \text{GL}_n(F)$ ,  $Q \in \text{GL}_m(F)$ . 根据定理 1.11,

$$M = Q^{-1}AP. \quad \square$$

**注解 1.14** 根据推论 1.12, 第一章第二讲命题 4.14 (iii) 可写为

$$\dim(\ker(\phi)) + \text{rank}(\phi) = \dim(V).$$

**例 1.15** 设  $\phi : F^{m \times n} \longrightarrow F^{n \times m}$  由公式  $\phi(X) = X^t$  给出. 求  $\text{rank}(\phi)$ .

**解.** 因为  $\phi$  是单射, 所以  $\dim(\ker(\phi)) = 0$ . 于是

$$\text{rank}(\phi) = mn.$$

**推论 1.16** 设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ . 则

(i)  $\phi$  是单射当且仅当  $\text{rank}(\phi) = \dim(V)$ .

(ii)  $\phi$  是满射当且仅当  $\text{rank}(\phi) = \dim(W)$ .

**证明.** (i)  $\phi$  单当且仅当  $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_V\}$  (第一章第一讲命题 2.2) 当且仅当  $\text{rank}(\phi) = \dim(V)$  (上述注释).

(ii)  $\phi$  满当且仅当  $\dim(\text{im}(\phi)) = \dim(W)$  当且仅当  $\text{rank}(\phi) = \dim(W)$  (推论 1.12).  $\square$

**推论 1.17** 设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$  且  $\dim(V) = \dim(W)$ . 则以下断言等价

(i)  $\phi$  是单射.

(ii)  $\phi$  是满射.

(iii)  $\phi$  是双射.

**证明.** 设  $n = \dim(V)$ ,  $r = \text{rank}(\phi)$ .



(i)  $\implies$  (ii). 由上述推论 (i),  $r = n$ . 于是  $r = \dim(W)$ . 从而,  $\phi$  是满射(上述推论 (ii)).

(ii)  $\implies$  (iii). 由上述推论 (ii),  $r = n$ . 于是  $r = \dim(V)$ . 从而,  $\phi$  是单射(上述推论 (i)), 即  $\phi$  是双射.

(iii)  $\implies$  (i). 显然.  $\square$

**推论 1.18** 设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A$  是  $\phi$  在基底  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  和  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  下的矩阵. 则

(i)  $\phi$  是单射当且仅当  $A$  列满秩, 即  $\text{rank}(A) = n$ .

(ii)  $\phi$  是满射当且仅当  $A$  行满秩, 即  $\text{rank}(A) = m$ .

(iii)  $\phi$  是双射, 则  $A$  是可逆方阵.

**证明.** 注意到  $A \in F^{m \times n}$ .

(i)  $\phi$  单当且仅当  $\text{rank}(\phi) = n$ , 即  $\text{rank}(A) = n$ . (推论 1.16 (i))

(ii)  $\phi$  满当且仅当  $\text{rank}(\phi) = m$ , 即  $\text{rank}(A) = m$ . (推论 1.16 (ii))

(iii) 由 (i) 和 (ii) 直接得出.  $\square$

### 1.3 线性映射的复合

**命题 1.19** 设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$  在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  下的矩阵是  $A$ . 设  $Z$  是  $F$  上的线性空间  $\delta_1, \dots, \delta_k$  是  $Z$  的一

组基,  $\psi \in \text{Hom}(W, Z)$  在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m; \delta_1, \dots, \delta_k$  下的矩阵是  $B \in F^{k \times m}$ . 则  $\psi \circ \phi \in \text{Hom}(V, Z)$  在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \delta_1, \dots, \delta_k$  下的矩阵是  $BA \in F^{k \times n}$ .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ & \searrow \psi \circ \phi & \downarrow \psi \\ & & Z \end{array}$$

**证明.** 关于  $\psi \circ \phi$  是线性映射的验证见上学期第二章命题 4.1. 计算

$$\psi \circ \phi(\mathbf{e}_j) = (\psi(\epsilon_1), \dots, \psi(\epsilon_n)) \vec{A}^{(j)} = (\delta_1, \dots, \delta_k) B \vec{A}^{(j)},$$

$j = 1, 2, \dots, n$ . 于是

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi(\mathbf{e}_1), \dots, \psi \circ \phi(\mathbf{e}_n)) &= (\delta_1, \dots, \delta_k) B (\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}) \\ &= (\delta_1, \dots, \delta_k) BA. \end{aligned}$$

映射  $\psi \circ \phi$  在选定基底下的矩阵是  $BA$ .  $\square$

**例 1.20** 设  $A \in F^{m \times n}$ ,  $\text{rank}(A) = r > 0$ . 则存在列满秩矩阵  $L \in F^{m \times r}$  和行满秩矩阵  $R \in F^{r \times n}$  使得  $A = LR$ .

**证明.** 设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$  在基底  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  和  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  下的矩阵等于  $A$ . 则  $\text{rank}(\phi) = r$ . 于是  $\ker(\phi)$  的维数是  $n - r$ . (见注释 1.14.) 从而  $V/\ker(\phi)$  的维数等于  $r$ . (见第一章第二讲引理 4.13.) 由线性映射基本定理 I 可知,  $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$ , 其中  $\pi: V \rightarrow V/\ker(\phi)$  是线性满射,

$\bar{\phi} : V/\ker(\phi) \longrightarrow W$  是线性单射. 设  $\delta_1, \dots, \delta_r$  是  $V/\ker(\phi)$  的一组基,  $R$  是  $\pi$  在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \delta_1, \dots, \delta_r$  下的矩阵,  $L$  是  $\bar{\phi}$  在  $\delta_1, \dots, \delta_r; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  下的矩阵. 则  $A = LR$  (命题 1.10), 且  $L$  列满秩,  $R$  行满秩.  $\square$

上述结果曾在上学期用矩阵打洞技术证明(见上学期第二章第六讲例 10.7).

## 1.4 线性同构

**定理 1.21** 设

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Hom}(V, W) &\longrightarrow F^{m \times n} \\ \phi &\longmapsto A, \quad \phi \text{ 在选定基底下的矩阵} \end{aligned}$$

则  $\Phi$  是线性同构.

**证明.** 设  $\phi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $A = \Phi(\phi)$  和  $B = \Phi(\psi)$ . 再设  $\alpha, \beta \in F$ . 对  $j = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} (\alpha\phi + \beta\psi)(\mathbf{e}_j) &= \alpha\phi(\mathbf{e}_j) + \beta\psi(\mathbf{e}_j) \\ &= \alpha(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)\vec{A}^{(j)} + \beta(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)\vec{B}^{(j)} \\ &= (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)(\alpha\vec{A}^{(j)} + \beta\vec{B}^{(j)}) \\ &= (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)\vec{C}^{(j)}, \quad \text{其中 } C = \alpha A + \beta B. \end{aligned}$$

于是,  $\Phi(\alpha\phi + \beta\psi) = C = \alpha A + \beta B = \alpha\Phi(\phi) + \beta\Phi(\psi)$ . 映射  $\Phi$  是线性的.

设  $A \in F^{m \times n}$ ,  $\phi_A \in \text{Hom}(V, W)$  满足

$$\phi(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) \vec{A}^{(j)},$$

$j = 1, 2, \dots, n$ . 由线性映射基本定理 II 可知  $\phi$  存在. 由矩阵表示的定义可知,  $A$  是  $\phi$  在选定基底下的矩阵.

$$\begin{aligned} \Theta : F^{m \times n} &\longrightarrow \text{Hom}(V, W) \\ A &\mapsto \phi_A \end{aligned}$$

根据定义直接验证得:  $\Theta \circ \Phi(\phi) = \phi$  且  $\Phi \circ \Theta(A) = A$ .  $\square$

由上述定理可知,  $\dim(\text{Hom}(V, W)) = mn$ .  $\square$

## 1.5 对偶映射

设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ . 则

$$\begin{aligned} \phi^* : W^* &\longrightarrow V^* \\ f &\mapsto f \circ \phi \end{aligned}$$

是从  $W^*$  到  $V^*$  的映射.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ & \searrow f \circ \phi & \downarrow f \\ & & F \end{array}$$

**引理 1.22** 设  $\phi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $\sigma \in \text{Hom}(U, V)$ ,  $\tau \in \text{Hom}(W, Z)$ ,  $\alpha \in F$ . 则

$$(\phi + \psi) \circ \sigma = \phi \circ \sigma + \psi \circ \sigma,$$

$$\tau \circ (\phi + \psi) = \tau \circ \phi + \tau \circ \psi,$$

和

$$(\alpha\phi) \circ \sigma = \phi \circ (\alpha\sigma) = \alpha(\phi \circ \sigma).$$

证明. 设  $\mathbf{u} \in U$ . 则

$$\begin{aligned}(\phi + \psi) \circ \sigma(\mathbf{u}) &= (\phi + \psi)(\sigma(\mathbf{u})) \\ &= \phi(\sigma(\mathbf{u})) + \psi(\sigma(\mathbf{u})) \\ &= \phi \circ \sigma(\mathbf{u}) + \psi \circ \sigma(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

由  $\mathbf{u}$  的任意性可知  $(\phi + \psi) \circ \sigma = \phi \circ \sigma + \psi \circ \sigma$ . 类似可证  $\tau \circ (\phi + \psi) = \tau \circ \phi + \tau \circ \psi$ .

$$(\alpha\phi) \circ \sigma(\mathbf{u}) = (\alpha\phi)(\sigma(\mathbf{u})) = \alpha\phi(\sigma(\mathbf{u})) = \alpha\phi \circ \sigma(\mathbf{u}),$$

且

$$\phi \circ (\alpha\sigma(\mathbf{u})) = \phi(\alpha\sigma(\mathbf{u})) = \alpha\phi(\sigma(\mathbf{u})) = \alpha\phi \circ \sigma(\mathbf{u}).$$

于是,  $(\alpha\phi) \circ \sigma = \phi \circ (\alpha\sigma) = \alpha(\phi \circ \sigma)$ .  $\square$

下面我们来验证  $\phi^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ . 设  $\alpha, \beta \in F$ ,  $f, g \in W^*$ .

$$\phi^*(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g) \circ \phi = \alpha f \circ \phi + \beta g \circ \phi = \alpha\phi^*(f) + \beta\phi^*(g).$$

验证完毕. 我们称  $\phi^*$  是  $\phi$  的对偶映射.

**命题 1.23** 设  $\phi \in \text{Hom}(V, W)$  在基底  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  和  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  下的矩阵为  $A = (a_{i,j})_{m \times n}$ . 则对偶映射  $\phi^*$  在对偶基  $\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_m^*$  和  $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$  下的矩阵是  $A^t$ .

**证明.** 我们先计算  $\phi^*(\epsilon_i^*)$  在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵,  $i = 1, 2, \dots, m$ . 对任意  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\phi^*(\epsilon_i^*)(\mathbf{e}_j) = \epsilon_i^*(\phi(\mathbf{e}_j)) = \epsilon_i^*(a_{1,j}\epsilon_1 + \dots + a_{m,j}\epsilon_m) = a_{i,j}.$$

则对于  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ ,

$$\begin{aligned} \phi^*(\epsilon_i^*)(\mathbf{x}) &= a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n \\ &= a_{i,1}\mathbf{e}_1^*(\mathbf{x}) + \dots + a_{i,n}\mathbf{e}_n^*(\mathbf{x}) \\ &= (a_{i,1}\mathbf{e}_1^* + \dots + a_{i,n}\mathbf{e}_n^*)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

于是,

$$\phi^*(\epsilon_i^*) = a_{i,1}\mathbf{e}_1^* + \dots + a_{i,n}\mathbf{e}_n^* = (\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*) \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*) \vec{A}^{t(i)}.$$

由此得出  $A^t$  是  $\phi^*$  在  $\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_m^*$  和  $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$  下的矩阵.  $\square$

该命题的一个直接推论是  $\phi$  和  $\phi^*$  的秩相等.

## 2 线性算子代数和矩阵相似

在本节中  $V$  是域  $F$  上的  $n$  维线性空间,  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  是  $V$  的一组基. 集合  $\text{Hom}(V, V)$  记为  $\mathcal{L}(V)$ , 其中的元素称为

线性算子. 线性算子通常用  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$ , 表示. 特别地  $\mathcal{O}$  代表  $V$  上的零算子(映射),  $\mathcal{E}$  代表  $V$  上的恒等算子(映射).

设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 算子  $\mathcal{A}$  在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵, 简称  $\mathcal{A}$  为在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵.

## 2.1 矩阵的相似

设  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  是  $V$  的另一组基, 且

$$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P,$$

其中  $P \in \text{GL}_n(F)$ . 设算子  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵等于  $A$ . 根据定理 1.8,  $\mathcal{A}$  在  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  下的矩阵等于  $P^{-1}AP$ . 我们的问题是如何选取  $V$  的一组基使得  $\mathcal{A}$  在该基下的矩阵尽可能简单(零元素尽可能多, 非零元出现的尽可能有规律).

**定义 2.1** 设  $A, B \in M_n(F)$ . 如果存在  $P \in \text{GL}_n(F)$  使得  $B = P^{-1}AP$ , 则称  $B$  与  $A$  相似. 记为  $B \sim_s A$ .

验证相似是等价关系如下. 对任意  $A \in M_n(F)$ ,  $A = E^{-1}AE$ . 于是  $A \sim_s A$ . 自反性成立. 设  $B \sim_s A$ . 则存在  $P \in \text{GL}_n(F)$  使得  $B = P^{-1}AP$ . 于是  $A = PBP^{-1}$ ,  $A \sim_s B$ . 对称性成立. 设  $A \sim_s B$ ,  $B \sim_s C$ . 则存在  $P, Q \in \text{GL}_n(F)$  使得  $B = P^{-1}AP$  和  $C = Q^{-1}BQ$ . 于是  $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$ , 即  $A \sim_s C$ . 传递性成立.

两个矩阵相似当且仅当它们是同一个线性映射在不同基底下的矩阵. 于是我们的问题可等价地叙述为给定矩阵  $A \in M_n(F)$  研究并计算与  $A$  相似的尽可能简单的矩阵.

**命题 2.2** 设  $A, B \in M_n(F)$ . 如果  $A \sim_s B$ , 则

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B), \quad \det(A) = \det(B), \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(B).$$

**证明.** 设  $B = P^{-1}AP$ , 其中  $P \in GL_n(F)$ . 因为乘以可逆矩阵不改变矩阵的秩, 所以  $\text{rank}(B) = \text{rank}(A)$ . 由行列式乘法定理可知,  $\det(B) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(A)$ .

为了证明  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ . 我们首先注意到迹是交换不变量, 即对任意  $M = (m_{i,j}), N = (n_{i,j}) \in M_n(F)$ ,

$$\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM).$$

(见上学期第二章第 5 讲命题 7.8.)

我们由  $\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(PP^{-1}A) = \text{tr}(A)$ .  $\square$

**例 2.3** 证明:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \not\sim_s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**证明.** 因为这两个矩阵的迹不同, 所以它们不相似.

**例 2.4** 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



问  $A$  和  $B$  是否相似?

证明. 设  $P \in \text{GL}_2(F)$  使得  $B = P^{-1}AP$ . 则  $PB = AP$ , 即  $P(E + C) = P$ . 其中

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是  $PC = O$ . 因为  $P$  可逆, 所以  $C = O$ . 矛盾. 这两个矩阵不相似.  $\square$

## 2.2 线性算子代数

我们已经知道  $(\mathcal{L}(V), +, \mathcal{O}, \text{数乘})$  是  $F$  上的线性空间. 注意到任何两个  $V$  上的线性算子都可以复合, 且对任意  $A, B, C \in \mathcal{L}(V)$ ,

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C \quad \text{和} \quad A \circ \mathcal{E} = \mathcal{E} \circ A = A.$$

再由引理 1.22 可知,  $(\mathcal{L}(V), +, \mathcal{O}, \circ, \mathcal{E})$  是一个环. 此外对任意  $\alpha \in F$ ,

$$\alpha(A \circ B) = (\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B).$$

这个性质使得我们称  $\mathcal{L}(V)$  是  $F$  上的一个代数.

**定理 2.5** 设

$$\Phi: \mathcal{L}(V) \longrightarrow \text{M}_n(F)$$

$$A \longmapsto A, \quad A \text{ 在 } \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \text{ 下的矩阵}$$

则  $\Phi$  既是线性同构又是环同构(此时称  $\Phi$  是代数同构).

**证明.** 根据定理 1.9,  $\Phi$  是线性同构. 设  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ , 它们在  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  下的矩阵分别是  $A, B$ . 根据命题 1.10,  $\Phi(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = AB = \Phi(\mathcal{A})\Phi(\mathcal{B})$ . 可直接验证  $\Phi(\mathcal{E}) = E_n$ .  $\square$ .

为了简洁,  $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$  也写成  $AB$ . 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ . 如果  $\mathcal{A}$  可逆, 则称  $\mathcal{A}$  是可逆算子. 如果存在  $\lambda \in F$  使得对任意  $\mathbf{x} \in V$ ,  $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ , 则称  $\mathcal{A}$  是数乘算子. 此时  $\mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}$ . 如果存在  $k \in \mathbb{Z}^+$  使得  $\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$ , 则称  $\mathcal{A}$  是幂零算子. 如果  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ , 则称  $\mathcal{A}$  是幂等算子.

由上述定理可知,  $\mathcal{A}$  是可逆(数乘, 幂零, 幂等)算子当且仅当  $\Phi(\mathcal{A})$  是(数乘, 幂零, 幂等)矩阵.

**例 2.6** 设  $\mathcal{D} : \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_n$  由公式  $\mathcal{D}(f) = f'$  定义. 则  $\mathcal{D}^n = \mathcal{O}$ . 该算子在  $1, x, \dots, x^{n-1}$  下的矩阵见第一章第三讲例 5.7.

**例 2.7** 设  $U_1, U_2$  是  $V$  的子空间满足  $V = U_1 \oplus U_2$ . 设  $\pi_i$  是  $V$  关于上述直和到  $U_i$  的投影,  $i = 1, 2$ . 因为关于直和的投影具有等方性(见第一章第七讲命题 12.2(ii)), 所以  $\pi_1$  和  $\pi_2$  都是幂等的. 设  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$  是  $U_1$  的基,  $\mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$  是  $U_2$  的基. 则  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$  是  $V$  的基. 在该基下  $\pi_1$  和  $\pi_2$  的矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_{n-d} \end{pmatrix}.$$