

第一章 空间与形式

例 9.19 设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

问 λ 为何值时 A 是正定的, A 是负定的?

解. A 的三个顺序主子式分别是

$$\Delta_1 = \lambda, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1, \quad \Delta_3 = \det(A) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

A 正定当且仅当 $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ 且 $\Delta_3 > 0$. 即 $\lambda > 1$.

A 负定当且仅当 $-A$ 正定. 而 $-A$ 的三个主子式是

$$\Omega_1 = -\lambda, \quad \Omega_2 = \lambda^2 - 1, \quad \Omega_3 = \det(A) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

A 负定当且仅当 $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$ 且 $\Omega_3 > 0$. 即 $\lambda < -2$.

例 9.20 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明 $\det(A)$ 不大于 A 的对角线上元素之积.

证明. 设 $A = (a_{i,j})$. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, $A = (a_{1,1})$. 于是 $\det(A) = a_{1,1}$. 结论成立. 设 $n > 1$ 且 $n - 1$ 时结论成立. 把 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

由定理 ?? (i) \implies (ii) 的证明可知, A_{n-1} 正定. 于是 $\det(A_{n-1}) \leq a_{1,1} \cdots a_{n-1,n-1}$. 令

$$P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\mathbf{v} \\ O_{1 \times (n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$P^t A P = \begin{pmatrix} A_{n-1} & O_{(n-1) \times 1} \\ O_{1 \times (n-1)} & a_{n,n} - \underbrace{\mathbf{v}^t A_{n-1}^{-1} \mathbf{v}}_{\alpha} \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(P) = 1$, 所以上式两边取行列式得

$$\det(A) = \det(A_{n-1})(a_{n,n} - \alpha).$$

因为 A_{n-1} 正定, 所以 A_{n-1}^{-1} 正定 (见例 ??). 于是 $\alpha \geq 0$. 由上式和归纳假设得

$$\det(A) \leq a_{1,1} \cdots a_{n-1,n-1} a_{n,n}. \quad \square$$

例 9.21 (Hadamard 不等式) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 证明:

$$|\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2} \quad \text{和} \quad |\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i}^2}.$$

证明. 不妨设 $A \in GL_n(\mathbb{R})$. 令 $M = A^t A$. 由定理 ?? (ii) 可知 M 正定. 设 $M = (m_{i,j})$. 则由上例得到

$$\det(M) \leq m_{1,1} \cdots m_{n,n}.$$

注意到

$$m_{i,i} = \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

所以

$$\det(A)^2 = \det(M) \leq \prod_{i=1}^n m_{i,i} = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

由此证明了第二个不等式. 令 $M = AA^t$. 我们可以证明第一个不等式. \square

10 二次曲线和曲面的仿射分类

10.1 仿射变换

在本小节中, F 是任意的域, V 是域 F 上的线性空间.

定义 10.1 设 $\phi: V \rightarrow V$ 是线性(自)同构, $\mathbf{v} \in V$ 是一个固定的向量. 映射

$$\begin{aligned} \rho: V &\longrightarrow V \\ \mathbf{x} &\longmapsto \phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \end{aligned}$$

称为 V 上一个由 ϕ 和 \mathbf{v} 定义的仿射变换 (*affine transformation*), 其中 \mathbf{v} 称为 ρ 的平移向量.

当 ϕ 是恒同映射是, ρ 称为平移变换 (*translation*).

命题 10.2 (i) 设 ρ_1, ρ_2 是 V 上两个仿射变换. 则 $\rho_2 \circ \rho_1$ 也是仿射变换.

(ii) 仿射变换可逆, 且其逆也是仿射变换.

证明. (i) 设 ρ_i 由线性同构 ϕ_i 和平移向量 \mathbf{v}_i 定义, $i = 1, 2$. 再设 $\mathbf{x} \in V$. 则

$$\rho_2 \circ \rho_1(\mathbf{x}) = \rho_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) = \phi_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = \phi_2 \circ \phi_1(\mathbf{x}) + \phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2.$$

于是 $\rho_2 \circ \rho_1$ 是由线性同构 $\phi_2 \circ \phi_1$ 和平移向量 $\phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2$ 定义的仿射变换.

(ii) 设 ρ 是由线性同构 ϕ 和平移向量 \mathbf{v} 定义的仿射变换. 根据 (i) 的证明, 我们令 σ 是由 ϕ^{-1} 和 $-\phi^{-1}(\mathbf{v})$ 定义的仿射变换. 对任意的 $\mathbf{x} \in V$,

$$\sigma \circ \rho(\mathbf{x}) = \sigma(\phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = \phi^{-1}(\phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) - \phi^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{x} + \phi^{-1}(\mathbf{v}) - \phi^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{x}.$$

类似地,

$$\rho \circ \sigma(\mathbf{x}) = \rho(\phi^{-1}(\mathbf{x}) - \phi^{-1}(\mathbf{v})) = \phi(\phi^{-1}(\mathbf{x}) - \phi^{-1}(\mathbf{v})) + \mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{x}.$$

于是, $\rho^{-1} = \sigma$. \square

注解 10.3 上述命题说明 V 上的所有仿射变换关于 \circ 构成群.

例 10.4 在这个例子中我们研究 \mathbb{R}^n 上的仿射变换. 在标准基下 \mathbb{R}^n 中每个向量是由 n 个坐标的列向量, 每个线性同构对应一个唯一的可逆矩阵. 于是仿射变换 ρ 可以具体的表示为

$$\rho: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

其中 $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, v_1, \dots, v_n 是固定的实数.

考虑函数 $f(x_1, \dots, x_n): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. 在微积分中我们经常做变量替换把 f 变为另一种形式. 变量替换是一个从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^n 的可逆映射

$$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

仿射变换是一种特殊的变量替换. 利用变量替换化简函数

可以用下列交换图直观地表示

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

其中 $g = f \circ T(x_1, \dots, x_n) = f(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n))$.

我们对函数 g 的知识可以通过同构 $f = g \circ T^{-1}$ 转换到成关于 f 的知识. 当然我们可能需要经过多次变换替换才能达到目的. 此时交换图表示为

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_1 \circ \dots \circ T_k} & \mathbb{R}^n \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

引理 10.5 设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 的次数等于 2, 其齐 2 次部分记为 h_2 . 把 p 看成从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R} 的函数, h_2 看成相应的二次型. 则存在 \mathbb{R}^n 上的仿射变换 ρ 使得

$$p \circ \rho: \quad \mathbb{R}^n \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{aligned} & x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 \\ & -\lambda x_{k+l+1} - \mu, \end{aligned}$$

其中 (k, l) 是 h_2 的签名, $\lambda \in \{0, 1\}$ 且 $\mu \in \mathbb{R}$.

证明. 设 $p = h_2 + h_1 + h_0$ 是 p 的加法分解. 则

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} + h_1(\mathbf{x}) + h_0,$$

其中 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$. 由惯性定理(矩阵版)可知, 存在 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t A P = \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \quad (1)$$

. 设 $\rho_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 由公式 $\rho_1(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ 给出. 则

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^t P^t A P \mathbf{x} + h_1(P\mathbf{x}) + h_0 \\ &\stackrel{(1)}{=} x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \\ &\quad + 2\alpha_1 x_1 + \cdots + 2\alpha_n x_n + h_0, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. 通过配方得

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1(\mathbf{x}) &= (x_1 + \alpha_1)^2 + \cdots + (x_k + \alpha_k)^2 \\ &\quad - (x_{k+1} - \alpha_{k+1})^2 - \cdots - (x_{k+\ell} - \alpha_{k+\ell})^2 \\ &\quad + 2\alpha_{k+\ell+1} x_{k+\ell+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n + \xi, \end{aligned}$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}$. 考虑平移变换

$$\rho_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+l} \\ x_{x+l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ x_k - \alpha_k \\ x_{k+1} + \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+l} + \alpha_{k+l} \\ x_{x+l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

则

$$p \circ \rho_1 \circ \rho_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 \\ + 2\alpha_{k+l+1}x_{k+l+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n + \xi.$$

情形 1. 当 $2\alpha_{k+l+1}x_{k+l+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n = 0$ 时, 令 $\lambda = 0$ 和 $\mu = -\xi$ 即可.

情形 2. 当 $2\alpha_{k+l+1}x_{k+l+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n \neq 0$ 时, 存在 $j \in \{k+l+1, k+l+2, \dots, n\}$ 使得 $\alpha_j \neq 0$. 设 $m = n - (k+l)$. 考虑一个 m 阶可逆方阵 B , 其中 B 的第一行是 $(-2\alpha_{k+l+1}, \dots, -2\alpha_n)$, 其它行中的元素只有一个是 1 和其它都是 0. 特别地, 第 j 个元素一定是零. 这样的可逆矩阵

显然存在. 于是

$$C = \begin{pmatrix} E_{k+l} & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

是 n 阶可逆矩阵. 则 $C\mathbf{x}$ 中的第 $k+l+1$ 个坐标等于 $-2\alpha_{k+l+1}x_{k+l+1} - \cdots - 2\alpha_n x_n$. 令 $\rho_3: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 由公式 $\rho_3(\mathbf{x}) = C^{-1}\mathbf{x}$ 给出. 则

$$p \circ \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 - x_{k+l+1} + \xi. \quad (2)$$

令 $\lambda = 1$ 和 $\mu = -\xi$ 即可. (上式的一个计算验证过程见注释 10.6). \square

注解 10.6 等式 (2) 的具体验证过程如下. 设 $\mathbf{y} = \rho_3(\mathbf{x})$, 其中 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$. 则

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1 \circ \rho_2(\mathbf{y}) &= y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_{k+l}^2 \\ &\quad + 2\alpha_{k+l+1}y_{k+l+1} + \cdots + 2\alpha_n y_n + \xi. \end{aligned}$$

注意到由 ρ_3 的定义可得:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{k+l} \end{pmatrix} = E_{k+l} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k+l} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} y_{k+l+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}
p \circ \rho_1 \circ \rho_2(\mathbf{x}) &= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 \\
&\quad + (2\alpha_{k+l+1}, \dots, 2\alpha_n) B^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \xi \\
&= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 \\
&\quad - \vec{B}_1 B^{-1} \begin{pmatrix} x_{k+l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \xi \\
&= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 \\
&\quad - \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{n-k-l-1} \begin{pmatrix} x_{k+l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \xi \\
&= x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 - x_{k+l+1} + \xi.
\end{aligned}$$

验证完毕.

定理 10.7¹ 设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 的次数等于 2, 其齐 2 次部分记为 h_2 . 把 p 看成从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R} 的函数, h_2 看成相应的二次型. 设 $r = \text{rank}(h_2)$ 和 k 是 h_2 的正惯性指数. 则存在

¹见柯斯特利金第二卷191页的推论.

\mathbb{R}^n 上的仿射变换 ρ 使得

$$p \circ \rho: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 - \mu,$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$; 或存在 \mathbb{R}^n 上的仿射变换 ρ 使得

$$p \circ \rho: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 - x_{r+1}$$

且 $r < n$.

证明. 注意到 h_2 的负惯性指数等于 $r - k$. 当引理 10.5 中 $\lambda = 0$ 时, 我们得到第一个函数. 否则 $\lambda = 1$. 我们考虑平移 $x_i \mapsto x_i, i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{r + 1\}, x_{r+1} \mapsto x_{r+1} - \mu$ 即可. \square

10.2 二次曲线和二次曲面分类

设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. 定义

$$S_p = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0\}$$

称为由 p 定义的超曲面. 当 $\deg(p) = 2$ 时, S_p 称为二次超曲面, \mathbb{R}^2 中的二次超曲面称为二次曲线, \mathbb{R}^3 中的二次超曲面称为二次曲面.

设 $\deg(p) = 2$, p 的齐二次部分等于 q , q 的秩等于 r , 签名是 (k, ℓ) . 则 $r > 0$ 且 $k + \ell = r$.

首先考虑二次曲线 ($n = 2$).

情形 C_1 . $r = 2$.

(1a) $(k, \ell) = (2, 0)$. $p = x_1^2 + x_2^2 - \mu$. 如果 $\mu < 0$, 则 $S_p = \emptyset$; 如果 $\mu = 0$, 则 $S_p = \{\mathbf{0}_2\}$; 如果 $\mu > 0$, 则 S_p 是(椭)圆.

(1b) $(k, \ell) = (0, 2)$. 与 (1a) 类似.

(1c) $k = 1, \ell = 1$. $p = x_1^2 - x_2^2 - \mu$. 如果 $\mu \neq 0$, 则 S_p 是双曲线. 如果 $\mu = 0$, 则 S_p 是两条相交于一点的直线.

情形 C_2 . $r = 1$.

(2a) $k = 1, \ell = 0$. 如果 $p = x_1^2 - x_1$, 则 S_p 是抛物线. 如果 $p = x_1^2 - \mu$, 则 $S_p = \emptyset$ ($\mu < 0$); S_p 是两条重合的直线($\mu = 0$); S_p 是两条平行直线($\mu > 0$).

(2b) $k = 0, \ell = 1$. 与 (2a) 类似.

再考虑二次曲面 ($n = 3$).

情形 S_1 . $r = 3$.

(1a) $(k, \ell) = (3, 0)$. $p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \mu$. 如果 $\mu < 0$, 则 $S_p = \emptyset$; 如果 $\mu = 0$, 则 $S_p = \{\mathbf{0}_3\}$; 如果 $\mu > 0$, 则 S_p 是(椭)球面.

(1b) $(k, \ell) = (0, 3)$. 与 (1a) 类似.

(1c) $(k, \ell) = (2, 1)$. $p = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \mu$. 如果 $\mu < 0$, 则 S_p 是单叶双曲面. 如果 $\mu = 0$, 则 S_p 是(椭)圆锥面. 如果 $\mu > 0$, 则 S_p 是双叶双曲面.

情形 S_2 . $r = 2$.

(2a) $(k, \ell) = (2, 0)$. 如果 $p = x_1^2 + x_2^2 - x_3$, 则 S_p 是椭圆抛物面; 如果 $p = x_1^2 + x_2^2 - \mu$, 则 $S_p = \emptyset$ ($\mu < 0$); $S_p = \{\mathbf{0}_3\}$ ($\mu = 0$); S_p (椭)圆柱面 ($\mu > 0$).

(2b) $(k, \ell) = (0, 2)$. 与 (2a) 类似.

(2c) $(k, \ell) = (1, 1)$. 如果 $p = x_1^2 - x_2^2 - x_3$, 则 S_p 是双曲抛物面. 如果 $p = x_1^2 - x_2^2 - \mu$, 则 S_p 是双曲柱面 ($\mu \neq 0$); S_p 是两张相交于一条直线的平面 ($\mu = 0$).

情形 S_3 . $r = 1$.

(3a) $(k, \ell) = (1, 0)$. 如果 $p = x_1^2 - x_2$, 则 S_p 是抛物柱面; 如果 $p = x_1^2 - \mu$, 则 $S_p = \emptyset$ ($\mu < 0$); S_p 是两张重合的平面 ($\mu = 0$); S_p 是两张平行的平面 ($\mu > 0$).

(3b) $(k, \ell) = (0, 1)$. 与 (3a) 类似.

11 斜对称双线性型

在本节中 F 是特征不等于 2 的域, V 是 F 线性空间.

引理 11.1 设 $f \in \mathcal{L}_2(V)$. 则 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$ 当且仅当对任意 $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$.

证明. 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$. 因为 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, 所以 $2f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. 于是 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. 反之, 设对任意 $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. 则任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$\begin{aligned} 0 &= f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

由此得出 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. \square

引理 11.2 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$, 则 \mathbf{u}, \mathbf{v} 线性无关.

证明. 因为 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$, 所以 \mathbf{u}, \mathbf{v} 都不是零向量. 假设 \mathbf{u}, \mathbf{v} 线性相关. 则存在 $\alpha \in F \setminus \{0\}$ 使得 $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$. 由引理 11.1 可知, $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\alpha\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. 矛盾. \square

定义 11.3 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$. 则 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 称为 f 的辛平面 (*symplectic plane*).

引理 11.4 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, W 是 f 的辛平面, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基. 则 $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$.

证: 设 $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ 使得 $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq 0$. 因为 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基, 所以存在 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F$ 使得

$$\mathbf{v}_1 = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_2 = \beta_1 \mathbf{w}_1 + \beta_2 \mathbf{w}_2.$$

于是

$$0 \neq f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = f(\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2, \beta_1 \mathbf{w}_1 + \beta_2 \mathbf{w}_2) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2).$$

由此可知 $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$. \square

引理 11.5 设 V 是 F 上的 n 维线性空间, $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, W 是 f 的辛平面. 则存在 V 中子空间 \widetilde{W} 满足对任意的 $\mathbf{x} \in W, \mathbf{y} \in \widetilde{W}$ 使得 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, 且 $V = W \oplus \widetilde{W}$.

证明. 设 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基,

$$U_i = \{\mathbf{y} \in V \mid f(\mathbf{w}_i, \mathbf{y}) = 0\},$$

$i = 1, 2$. 由 f 的双线性性可知, U_1, U_2 都是子空间. 根据引理 11.4, $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$. 于是 $\mathbf{w}_2 \notin U_1$. 由 f 的斜对称性可知 $f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) \neq 0$. 于是 $\mathbf{w}_1 \notin U_2$. 即 $l_1 = f(\mathbf{w}_1, \mathbf{y})$ 和 $l_2 = f(\mathbf{w}_2, \mathbf{y})$ 都是关于 \mathbf{y} 的非零线性函数. 于是 $\dim(\text{im}(l_i)) = 1$. 进而 $U_i = \ker(l_i)$ 的维数是 $n - 1, i = 1, 2$.

令 $\widetilde{W} = U_1 \cap U_2$. 则对于任意 $\mathbf{y} \in \widetilde{W}$,

$$f(\mathbf{w}_1, \mathbf{y}) = f(\mathbf{w}_2, \mathbf{y}) = 0.$$

由 f 的双线性可知, 对任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$,

$$f(\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2, \mathbf{y}) = 0.$$

即对于任意 $\mathbf{x} \in W, \mathbf{y} \in \widetilde{W}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

根据维数公式, 我们有

$$\dim(\widetilde{W}) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2) \geq n - 1 + n - 1 - n = n - 2.$$

若 $\mathbf{w} \in W \cap \widetilde{W}$, 则存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ 使得 $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2$.

又因为 $\mathbf{w} \in \widetilde{W}$, 所以

$$f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}) = 0 \implies \alpha_1 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0.$$

由引理 11.1, $\alpha_1 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) = 0$. 再由引理 11.4, $\alpha_2 = 0$. 类似地, 从 $f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) = 0$ 可推出 $\alpha_1 = 0$. 于是 $\mathbf{w} = 0$. 即 $W + \widetilde{W}$ 是直和. 由此可得.

$$\dim(W \oplus \widetilde{W}) = \dim(W) + \dim(\widetilde{W}) \geq 2 + n - 2 = n.$$

从而 $V = W \oplus \widetilde{W}$. \square

定理 11.6 设 V 是 F 上的有限维线性空间, $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$.

则存在 f 的辛平面 W_1, \dots, W_k 和子空间 U 满足

(i) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$;

(ii) $f|_{U \times U}$ 上是零双线性型;

(iii) 对任意 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\mathbf{x} \in W_1 \oplus \cdots \oplus W_i$, $\mathbf{y} \in W_{i+1} \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$, 我们有 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

证明. 如果 f 是零双线性型, 则取 $k = 0$ 和 $U = V$ 即可. 我们假设 f 非零且 $n = \dim(V)$. 则 $n > 1$.

对 n 归纳. 设 $n = 2$. 因为 f 非零, 所以存在 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. 由引理 11.2, 我们有 $V = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 是 f 的辛平面. 此时取 $W_1 = V$, $k = 1$ 和 $U = \{\mathbf{0}\}$ 即可.

设 $n > 1$ 且结论对维数小于 n 的线性空间成立. 因为 f 非零, 所以存在 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$ 使得 $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0$. 则 $W_1 = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$. 根据引理 11.5, 存在 V 的子空间 \widetilde{W}_1 使得对任意 $\mathbf{x} \in W_1$, $\mathbf{y} \in \widetilde{W}_1$ 我们有 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 且 $V = W_1 \oplus \widetilde{W}_1$. 考虑 \widetilde{W}_1 上的斜对称双线性型 $f_1 = f|_{\widetilde{W}_1 \times \widetilde{W}_1}$. 如果 f_1 是零映射, 则取 $k = 1$ 和 $U = \widetilde{W}_1$ 即可. 否则, 由归纳假设存在 f_1 的辛平面 W_2, \dots, W_k 和 \widetilde{W}_1 的子空间 U 使得

(i) $\widetilde{W} = W_2 \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$;

(ii) $f_1|_{U \times U}$ 上是零双线性型;

(iii) 对任意 $j \in \{2, 3, \dots, k\}$, $\mathbf{x} \in W_2 \oplus \cdots \oplus W_j$, $\mathbf{y} \in W_{j+1} \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$, 我们有 $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

则 $V = W_1 \oplus \widetilde{W} = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$. 进而 $f|_{U \times U} = f_1|_{U \times U}$ 上是零双线性型. 设 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\mathbf{x} \in W_1 \oplus \cdots \oplus W_i$, $\mathbf{y} \in W_{i+1} \oplus \cdots \oplus W_k \oplus U$. 则 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, 其中 $\mathbf{x}_1 \in W_1$, $\mathbf{x}_2 \in W_2 \oplus \cdots \oplus W_i$. 则

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = 0 + 0 = 0.$$

于是, W_1, W_2, \dots, W_k, U 即为所求. \square .

定理 11.7 设 V 是 F 上 n 维线性空间, $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$. 则存在 V 的一组基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 使得 f 在该基下的矩阵等于

$$M = \begin{pmatrix} S_2 & & & & & \\ & S_2 & & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & S_2 & & \\ & & & & O_{(n-2k) \times (n-2k)} & \end{pmatrix},$$

其中

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 2k = \text{rank}(f).$$

证明. 根据定理 11.6, 存在 f 的辛平面 f 的辛平面 W_1, \dots, W_k 和子空间 U 满足定理 11.6 中的三个性质. 设 $\mathbf{w}_{2i-1}, \mathbf{w}_{2i}$ 是 W_i 的一组基. 根据引理 11.4, $\alpha_i = f(\mathbf{w}_{2i-1}, \mathbf{w}_{2i}) \neq 0$. 令 $\mathbf{e}_{2i-1} = \alpha_i^{-1} \mathbf{w}_{2i-1}$, $\mathbf{e}_{2i} = \mathbf{w}_{2i}$. 则 $f(\mathbf{e}_{2i-1}, \mathbf{e}_{2i}) = 1$,

$i = 1, 2, \dots, k$. 由直和分解 $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \oplus U$ 可知, $\dim(U) = n - 2k$. 再设 $\mathbf{e}_{2k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 U 的一组基. 上述直和分解保证 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{2k-1}, \mathbf{e}_{2k}, \mathbf{e}_{2k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 由定理 11.6 中的第二和第三个性质可知, f 在这组基下的矩阵为 M . \square

推论 11.8 设 $A \in \text{SSM}_n(F)$. 则 A 秩是偶数. 设 $\text{rank}(A) = 2k$. 则

$$A \sim_c \begin{pmatrix} S_2 & & & & \\ & S_2 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & S_2 & \\ & & & & O_{(n-2k) \times (n-2k)} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明. 设

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

是 F^n 上的双线性型. 因为 A 斜对称, 所以 f 斜对称. 根据定理 11.7, A 与上述矩阵合同. 于是 $\text{rank}(A) = 2k$. \square

例 11.9 证明 F 上奇数阶斜对称方阵的行列式等于零; 偶数阶斜对称方阵的行列式等于 F 中某个元素的平方.

证明. 设 $A \in \text{SSM}_n(F)$. 如果 n 是奇数, 则推论 11.9 指出 A 不满秩. 于是 $\det(A) = 0$. 设 n 是偶数. 如果 A 不满秩,

则结论显然成立. 否则存在 $P \in GL_n(F)$ 使得

$$A = P^t \begin{pmatrix} S_2 & & & & \\ & S_2 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & S_2 & \\ & & & & S_2 \end{pmatrix} P, \quad \text{其中 } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $\det(A) = \det(P^t) \det(S_2)^{\frac{n}{2}} \det(P) = \det(P)^2$. \square

例 11.10 设 A 是整数环上偶数阶斜对称满秩方阵. 证明 $\det(A)$ 是某个正整数的平方.

证明. 注意到 $A \in SSM_n(\mathbb{Q})$. 由上例可知 $\det(A) = a^2$, 其中 a 是某个正有理数. 但 $\det(A) \in \mathbb{Z}^+$. 如果 a 不是整数, 则 a^2 也不是. 这样等式 $\det(A) = a^2$ 不可能成立. 于是 $a \in \mathbb{Z}^+$.

在上例假设条件下 $\sqrt{\det(A)}$ 称为 A 的 *Pfaffian*.