推论 7.15 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$ 且 $\mathrm{rank}(f) = r$. 则存在 V 的一组规范基使得 f 在该基下的矩阵是

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in F \setminus \{0\}$.

证明. 由上一讲定理 7.11, 存在 f 规范基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. 于是

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ 且 } i \neq j.$$

因为 $r = \mathrm{rank}(A)$, 所以在 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n)$ 中恰好有 r 个非零. 适当调整下标后, 我们可以得到一组新的规范基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 满足 $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$,

$$f(\epsilon_i, \epsilon_i) \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, r, \text{ 且 } f(\epsilon_j, \epsilon_j) = 0,\ j = r+1, r+2, \ldots, n.$$

令 $\lambda_i = f(\epsilon_i, \epsilon_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 即可. □

推论 7.16 设 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 且 $\mathrm{rank}(A) = r$. 则存在 F 中非零元素 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 使得 $A \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$.

证明. 由上述推论直接可得. □

例 7.17 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{C})$ 且 $r = \mathrm{rank}(A)$. 则

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

证明. *由推论 7.16,* $A \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 是非零复数. 由代数学基本定理 $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}$ 是复数. 令

$$P = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r}\right).$$

则 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 且对称. 直接计算

$$\begin{aligned} A &\sim_c P^t \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0) P \\ &= P^t \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0) P \\ &= \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7.3 雅可比(Jacobi)公式

设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 矩阵 A 的子式

$$M\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k \end{pmatrix},$$

其中 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, 称为 A 的一个 k 阶主子式. 特别地,

$$M\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, k \\ 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix}$$

称为 A 的 k 阶顺序主子式.

例 7.18 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的三个顺序主子式分别是

$$a_{11}, \quad \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \det(A).$$

定理 7.19 *(Jacobi 公式)* 设 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$. 设 $\Delta_0 = 1$, Δ_i 是 A 的 i 阶顺序主子式. 如果 $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ 都非零. 则

$$A \sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right).$$

证明. 设 $A = (a_{i,j})_{n\times n}$. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时,

$$A = (a_{1,1}) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\right).$$

结论成立. 设 $n > 1$ 且 $n-1$ 时结论成立. 设 B 是由 A 的前 $(n-1)$ 行和 $(n-1)$ 列元素组成的子矩阵. 则 B 对称且它的 $n-1$ 个顺序主子式是 $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$. 由归纳假设可知

$$B \sim_c \underbrace{\operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\right)}_{C}.$$

于是存在 $P \in \mathrm{GL}_{n-1}(F)$ 使得 $P^t BP = C$. 令

$$Q = \begin{pmatrix} P & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} Q^t AQ &= \begin{pmatrix} P^t & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^t & a_{n,n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{w} = P^t\mathbf{v}$. 对 Q^tAQ 用初等行伴列变换并注意到 C 对称, 我们得到

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} E_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ -\mathbf{w}^t \left(C^{-1}\right)^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^t & a_{n,n} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_{n-1} & -C^{-1}\mathbf{w} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}}_{R} \\ &= \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ O_{1\times(n-1)} & \lambda \end{pmatrix} R, \quad \text{其中 } \lambda \text{ 是 } F \text{ 中某个元素}, \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} C & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & \alpha \end{pmatrix}}_{M}, \quad \text{其中 } \alpha \text{ 是 } F \text{ 中某个元素}. \end{aligned}$$

最后, 我们来验证 $\alpha = \Delta_n/\Delta_{n-1}$. 由上述推导得出

$$C = P^tBP \quad \text{和} \quad M = R^tQ^tAQR.$$

因为 $\det(C) = \Delta_{n-1} = \det(B)$, 所以由上述第一个等式蕴含 $\det(P)^2 = 1$. 而上述第二个等式蕴含

$$\Delta_{n-1}\alpha = \Delta_n \det(P)^2 \implies \alpha = \Delta_n/\Delta_{n-1}. \quad \square$$

例 7.20 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_3(\mathbb{R}).$$

计算对角阵 $B \in \mathrm{SM}_3(\mathbb{R})$ 使得 $A \sim_c B$.

解. 因为不需要计算转换矩阵 P. 我们可以试试利用 *Jacobi* 方法. 但 A 的一阶主子式等于零. 于是, 我们通过行列相伴变换得到

$$A \sim_c B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} \frac{2}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\det(B)}{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

例 7.21 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_2(\mathbb{Z}_2).$$

证明 A 不合同于对角方阵.

证明. 设

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$$

使得 $P^t A P = \mathrm{diag}_2(u, v)$. 则

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac & ad + bc \\ ad + bc & 2bd \end{pmatrix} = \mathrm{diag}_2(u, v).$$

于是 $u = v = 0$ $(\because\ 2 = 0)$. 由此可知 $\mathrm{rank}(A) = 0$. 矛盾.

7.4 线性同构

因为 $\mathcal{L}_2(V)$ 是 $\mathrm{Map}(V \times V, F)$ 的子集, 所以双线性型可以做加法和数乘. 下面我们来验证 $\mathcal{L}_2(V)$ 是 $\mathrm{Map}(V \times V, F)$ 的子空间.

设 $f, g, \in \mathcal{L}_2(V)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$. 则

$$\begin{aligned}(f+g)(\mathbf{x}+\mathbf{z}, \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}+\mathbf{z}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}+\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ &= (f+g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (f+g)(\mathbf{z}, \mathbf{y}).\end{aligned}$$

同理 $(f+g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = (f+g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (f+g)(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. 再设

$\lambda \in F$. 则

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \lambda (f+g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}).\end{aligned}$$

同理, $(f+g)(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \lambda(f+g)(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. 故 $f+g \in \mathcal{L}_2(V)$.

设 $\alpha \in F$. 则

$$\begin{aligned}(\alpha f)(\mathbf{x}+\mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \alpha(f(\mathbf{x}+\mathbf{z}, \mathbf{y})) \\ &= \alpha(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{z}, \mathbf{y})) \\ &= (\alpha f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\alpha f)(\mathbf{z}, \mathbf{y}).\end{aligned}$$

同理 $(\alpha f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\alpha f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\alpha f)(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

$$\begin{aligned}(\alpha f)(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \alpha(f(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y})) \\ &= \alpha \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \lambda (\alpha f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}).\end{aligned}$$

同理, $(\alpha f)(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \lambda(\alpha f)(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. 故 $\alpha f \in \mathcal{L}_2(V)$.

命题 7.22 两个线性空间 $\mathcal{L}_2(V)$ 和 $\mathrm{M}_n(F)$ 线性同构. 特别地, $\mathcal{L}_2^+(V)$ 和 $\mathrm{SM}_n(F)$ 线性同构, $\mathcal{L}_2^-(V)$ 和 $\mathrm{SSM}_n(F)$ 线性同构.

证明. 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. 对 $f \in \mathcal{L}_2(V)$, 令 M_f 是 f 在该基底下的矩阵, 即

$$M_f = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n \times n}.$$

令

$$\begin{aligned}\phi:\ \mathcal{L}_2(F) &\longrightarrow \mathrm{M}_n(F)\\ f &\mapsto M_f.\end{aligned}$$

设 $f, g \in \mathcal{L}_2(F)$, $\alpha, \beta \in F$.

$$\begin{aligned}\phi(\alpha f+\beta g) &= M_{\alpha f+\beta g} = ((\alpha f+\beta g)(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j))_{n\times n})\\ &= \alpha(f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j))_{n\times n} + \beta(g(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j))_{n\times n}\\ &= \alpha M_f + \beta M_g = \alpha\phi(f)+\beta\phi(g).\end{aligned}$$

故 ϕ 是线性映射.

设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$ 是 V 中的两个任意向量.

$$\begin{aligned}\psi:\ \mathrm{M}_n(F) &\longrightarrow \mathcal{L}_2(F)\\ M &\mapsto f_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1,\ldots,x_n)M\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由上一讲定理 7.2 中存在性部分的证明可知 $f_M(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{L}_2(V)$. 故 ψ 是良定义的. 再根据定理 7.2 中唯一性部分的证明可知

$$M = (f_M(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j))_{n\times n}.$$

于是, 对任意 $M \in \mathrm{M}_n(F)$,

$$\phi\circ\psi(M) = \phi(f_M) = M.$$

另一方面, 对任意 $f \in \mathcal{L}_2(V)$,

$$\psi \circ \phi(f) = \psi(M_f).$$

由 M_f 的定义可知, $\psi(M_f) = f$. 故 $\psi = \phi^{-1}$. 于是, ϕ 是线性同构.

由上一讲例 7.9 可知, $\phi|_{\mathcal{L}_2^+(V)}$ 是从 $\mathcal{L}_2^+(V)$ 到 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的线性映射, 其逆是 $\psi|_{\mathrm{SM}_n(F)}$. 故 $\mathcal{L}_2^+(V)$ 线性同构于 $\mathrm{SM}_n(F)$. 同理 $\mathcal{L}_2^-(V)$ 线性同构于 $\mathrm{SSM}_n(F)$. $\square$

8 二次型 (quadratic forms)

我们从双线性型的角度引入二次型, 这样可以使我们可以直接应用双线性型的结论. 然后我们说明二次型和二次齐次多项式之间的关系. 在本节中 V 是域 F 上的有限维线性空间, F 的特征不是 2.

8.1 从双线性型到二次型

定义 8.1 设 $q : V \longrightarrow F$ 称为 V 上的二次型, 如果

(i) 对于任意的 $\mathbf{v} \in V$, $q(\mathbf{v}) = q(-\mathbf{v})$;

(ii) 对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y}))$$

是 V 上的对称双线性型. f 称为 q 的配极.

注解 8.2 设 q 是 V 上的二次型. 则 $q(\mathbf{0})=0$. 这是因为在上述定义条件 *(ii)* 中代入 $\mathbf{x}=\mathbf{y}=\mathbf{0}$, 得到

$$0=f(\mathbf{0},\mathbf{0})=-\frac{1}{2}q(\mathbf{0}) \implies q(\mathbf{0})=0.$$

下面的命题说明二次型和配极之间的关系.

命题 8.3 *(i)* 设 q 是 V 上的二次型, 其配极是 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$. 则对任意的 $\mathbf{x}\in V$, $q(\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

(ii) 设 $f\in\mathcal{L}_2^+(V)$. 则 $q(\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})$ 是一个以 f 为配极的二次型.

证明. (i). 由定义 8.1 中的 (ii) 和 (i) 可知.

$$\begin{aligned}
&-f(\mathbf{x},\mathbf{x})=f(\mathbf{x},-\mathbf{x})\overset{(ii)}{=}\frac{1}{2}(q(\mathbf{0})-q(\mathbf{x})-q(-\mathbf{x}))\\
&=-\frac{1}{2}(q(\mathbf{x})+q(-\mathbf{x}))\overset{(i)}{=}-q(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

于是, $q(\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

(ii) 直接计算得 $q(-\mathbf{x})=f(-\mathbf{x},-\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})=q(\mathbf{x})$. 由对称双线性型的极化公式定义 8.1 中 (ii) 成立. □

推论 8.4 设 q 是 V 上的二次型. 则对任意的 $\alpha\in F$ 和 $\mathbf{v}\in V$, $q(\alpha\mathbf{v})=\alpha^2 q(\mathbf{v})$.

证明. 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$ 是 q 的配极. 由上述命题 (i),

$$q(\alpha\mathbf{x}) = f(\alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \alpha^2 q(\mathbf{x}). \quad \square$$

定理 8.5 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, q 是 V 上的二次型. 则存在唯一的矩阵 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 使得对于任意的 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 使得

$$q(\mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证明. 设 f 是 q 的配极, A 是 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 且对任意的 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$, 我们有

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

于是, 由命题 8.3 可知,

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

存在性成立.

再设 $B\in \mathrm{SM}_n(F)$ 使得

$$q(\mathbf{x})=(x_1,\dots,x_n)B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

令

$$\begin{aligned}g:\ V\times V &\longrightarrow F\\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) &\mapsto (x_1,\dots,x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

可直接验证 $g\in\mathcal{L}_2^+(V)$. 因为 $g(\mathbf{x},\mathbf{x})=q(\mathbf{x})$, 所以 g 是 q 的配极(命题 8.3 (ii)) 且 B 是 g 在 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 因为 $f=g$, 所以 $A=B$. 唯一性成立. □

鉴于上述定理, 我们称矩阵 A 是二次型 q 在基底 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 进而, 配极 f 的秩称为 q 的秩, 记为 $\mathrm{rank}(q)$.

定理 8.6 设 V 的两组基是 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}_1',\dots,\mathbf{e}_n'$, 且

$$(\mathbf{e}_1',\dots,\mathbf{e}_n')=(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)P,$$

其中 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$. 设 V 上的二次型 q 在 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A, 在 $\mathbf{e}_1',\dots,\mathbf{e}_n'$ 下的矩阵为 B. 则 $B=P^tAP$.

证明. 设 f 是 q 的配极. 则 A 和 B 分别是 f 在 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$

和 $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'$ 下的矩阵. 由第四周讲义第 20 页的内容可知，$B = P^t AP$. $\square$

例 8.7 设 $p \in F[x_1, \ldots, x_n]$ 齐二次, 多项式函数 $p : F^n \to F$ 由公式 $p(\mathbf{v}) = p(v_1, \ldots, v_n)$ 给出, 其中 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)^t$ 是 F^n 中的任意元素. 则 p 是 F^n 上的二次型.

证明. 因为 p 是齐二次的, 所以

$$p = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{i,j} x_i x_j.$$

令 $\beta_{i,i} = \alpha_{i,i}$, $i = 1, 2 \ldots, n$, $\beta_{i,j} = \alpha_{i,j}/2$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 其中 $\{i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 且 $i < j$. 而 $\beta_{j,i} = \beta_{i,j}$, 其中 $\{i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 且 $i < j$. 则

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j} x_i^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n} \beta_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} x_i x_j \\ &= (x_1, \ldots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n,1} & \cdots & \beta_{n,n} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由 $\beta_{i,j}$ 的定义可知, A 是对称的. 令 f 是在标准基下矩阵是 A 的对称双线性型. 则

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (v_1, \ldots, v_n) A (v_1, \ldots, v_n)^t = p(\mathbf{v}).$$

于是, p 是 F^n 上的二次型. 它在标准基下的矩阵等于 A. 由 $\beta_{i,j}$ 的定义可知,

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \frac{\alpha_{1,2}}{2} & \cdots & \frac{\alpha_{1,n}}{2} \\ \frac{\alpha_{1,2}}{2} & \alpha_{2,2} & \cdots & \frac{\alpha_{2,n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_{1,n}}{2} & \frac{\alpha_{2,n}}{2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}.$$

例 8.8 设 $p=x_2^2-x_1x_2+4x_2x_3$. 求 p 在 $\mathbb{R}^3$ 的标准基下的矩阵和秩.

解. 由上例可知,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

由定义得出 $\operatorname{rank}(p)=\operatorname{rank}(A)=2$.

例 8.9 设 $p\in F[x_1,\ldots,x_n]$, 非零齐二次. 证明: 如果 p 可以分解为两个一次多项式之积, 则 p 作为 F^n 上的二次型的秩不高于 2.

证明. 设 $p=fg$, 其中 f,g 是 $F[x_1,\ldots,x_n]$ 的齐一次多项式. 进而, 令

$$f=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n,\quad g=\beta_1x_1+\cdots+\beta_nx_n,$$

其中 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$ 不全为零, $\beta_1,\ldots,\beta_n\in F$ 也不全为零. 直接计算得 p 做为 F^n 上得二次型的矩阵是

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{\alpha_i\beta_j+\beta_i\alpha_j}{2}\right)_{n\times n}\\&=\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{B}+\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}_{C}.\end{aligned}$$

于是, $\operatorname{rank}(p)=\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B+C)\le\operatorname{rank}(B)+\operatorname{rank}(C)=2$ [1]. $\square$

定理 8.10 设 q 是 V 上的二次型. 则存在 V 的一组基 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 使得 q 在该基下的矩阵是对角阵. 再设该对角阵是 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. 则对任意 $\mathbf{x}=x_1\epsilon_1+\cdots+x_n\epsilon_n\in V$,

$$q(\mathbf{x})=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2. \tag{1}$$

证明. 设 q 的配极是 f. 由上一节定理 7.12 得出, f 的规范基 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$. 于是 q 在该基下的矩阵是对角阵. 设该对角阵是 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. 则对任意的 $\mathbf{x}=x_1\epsilon_1+\cdots+x_n\epsilon_n$, $\mathbf{y}=y_1\epsilon_1+\cdots+y_n\epsilon_n\in V$,

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda_1x_1y_1+\cdots+\lambda_nx_ny_n.$$

[1] $V_c(B+C)\subset V_c(B)+V_c(C)\implies\operatorname{rank}(B+C)\le\dim(V_c(B)+V_c(C))\le\dim(V_c(B))+\dim(V_c(C))=\operatorname{rank}(B)+\operatorname{rank}(C)$.

故

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2. \quad \square$$

基于上述定理, 我们称 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 是 q 的一组规范基, (1) 是 q 的一个规范型.

由上一节推论 7.17 可知

推论 8.11 设 q 是 V 上的二次型且 $r = \operatorname{rank}(q)$. 则存在 q 的规范基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 使得对任意 $\mathbf{x} = x_1\epsilon_1 + \cdots + x_n\epsilon_n \in V$, $q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$.

例 8.12 设 $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 是齐二次的*(非零)*多项式. 则 f 可以分解为两个一次多项式之积当且仅当 f 作为二次型的秩不大于 3.

证明. 根据上例, 只要证明 $\operatorname{rank}(f) < 3$ 时, f 是两个齐一次多项式之积. 设

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

则 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{C})$. 根据例 *7.17*, 存在 $P = (p_{i,j}) \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$A = P^t \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P,$$

其中 $r=\operatorname{rank}(A)$. 令

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

则

$$f(x_1,\dots x_n) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2.$$

如果 $r=1$, 则

$$f(x_1,\dots x_n) = y_1^2 = (p_{1,1}x_1 + \cdots + p_{1,n}x_n)^2.$$

如果 $r=2$, 则

$$f(x_1,\dots,x_n) = y_1^2 + y_2^2 = (y_1 - \sqrt{-1}y_2)(y_1 + \sqrt{-1}y_2).$$

把 $y_1 = p_{1,1}x_1 + \cdots + p_{1,n}x_n$ 和 $y_2 = p_{2,1}x_1 + \cdots + p_{2,n}x_n$ 带入上式得到 f 的因式分解.

8.2 利用配方法化规范型

我们用一个具体的例子说明如何用配方法把一个二次型化为它的规范型.

例 8.13 设 $p = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \in \mathbb{R}[x_1,x_2,x_3]$. 求 $\mathbb{R}^3$ 上二次型 p 的一组规范基和一个规范型.

解. 设

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} p &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 \\ &= 2(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 - 2y_3^2 \\ &= 2(y_1 + y_3)^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2. \end{aligned}$$

设

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

则 $p = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2$. 注意到

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P_1P_2^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

设 A 是 p 在标准基下的矩阵. 则

$$p=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(z_1,z_2,z_3)\left(P_1P_2^{-1}\right)^t A(P_1P_2^{-1})\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

$$=(z_1,z_2,z_3)\mathrm{diag}(2,-2,-2)\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}.$$

于是, $A\sim_c \mathrm{diag}(2,-2,-2)$ 且规范基是

$$P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

的三个列向量.

命题 8.14 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{Q}(V)$ 是 V 上所有二次型的集合. 则 $\mathcal{Q}(V)$ 是 F 上的线性空间. 进而线性空间 $\mathcal{Q}(V)$ 和 $\mathrm{SM}_n(F)$ 是线性同构的.

证明. 设 $p,q\in\mathcal{Q}(V)$, 它们的配极分别是 f 和 g. 对任意的 $\alpha,\beta\in F$, 可直接验证 $\alpha p+\beta q$ 的配极是 $\alpha f+\beta g$. 于是, $\alpha p+\beta q\in\mathcal{Q}(V)$. 从而 $\mathcal{Q}(V)$ 是线性空间. 该结论还说明

$$\begin{array}{rccc}\phi: & \mathcal{Q}(V) & \longrightarrow & \mathcal{L}_2^+(V)\\ & p & \mapsto & f\end{array}$$

是线性映射. 设 $f = \phi(p)$ 是零对称双线性型. 根据命题 8.3 (i), $p = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. 于是, p 是零二次型. 由此可知 ϕ 是单射. 根据命题 8.3 (ii), ϕ 是满射. 我们证明了 ϕ 是线性同构. $\square$