第一章　空间与形式

6　对偶空间

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

6.1　对偶基

线性空间 $\mathrm{Hom}(V,F)$ 称为 V 的对偶空间, 记为 V^*. 换言之, V^* 是 V 上所有线性函数的集合, 其中的加法和数乘由 $\mathrm{Map}(V,F)$ 给出.

定理 6.1 *设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 则在 V^* 中存在唯一的一组基 $\mathbf{e}_1^*,\ldots,\mathbf{e}_n^*$ 满足 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j)=\delta_{i,j}, i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$. 特别地, $\dim(V^*)$=n. ($\mathbf{e}_1^*,\ldots,\mathbf{e}_n^*$ 称为 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 的对偶基.)*

证明. 对 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, 设 $\mathbf{e}_i^*\in V^*$ 满足 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j)=\delta_{i,j}$, $j=1,2,\ldots,n$. 由线性映射基本定理 II 可知这样的 $\mathbf{e}_i^*$ 存在且唯一. 我们只要证明 $\mathbf{e}_1^*,\ldots,\mathbf{e}_n^*$ 是 V^* 的基即可.

设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$ 使得 $\alpha_1\mathbf{e}_1^*+\cdots+\alpha_n\mathbf{e}_n^*=\mathbf{0}^*$, 其中 $\mathbf{0}^*$ 代表 V^* 中的零元, 即零函数. 设 $j\in\{1,2,\ldots,n\}$. 则

$$0=\mathbf{0}^*(\mathbf{e}_j)=\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbf{e}_i^*\right)(\mathbf{e}_j)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\delta_{i,j}=\alpha_j.$$

于是 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$, 即 $\mathbf{e}_1^*,\ldots,\mathbf{e}_n^*$ 线性无关.

再设 $f \in V^*$ 且 $f(\mathbf{e}_j) = \beta_j, j = 1, 2, \ldots, n$. 令

$$g = \beta_1 \mathbf{e}_1^* + \cdots + \beta_n \mathbf{e}_n^*.$$

则对于任意 $j \in \{1.2. \ldots, n\}$, 我们有

$$g(\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i^* \right) (\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \delta_{i,j} = \beta_j.$$

再由线性映射基本定理 II 中的唯一性可知, $f = g$. □

例 6.2 对偶基为取坐标提供方便. 设 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$. 证明: 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i = \mathbf{e}_i^*(\mathbf{x})$.

证明. 我们计算

$$\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{i,j} = x_i. \quad \square$$

由此我们可以得出 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = 0$ 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 成立.

引理 6.3 设 $f_1, \ldots, f_n$ 是 V^* 的一组基, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 当且仅当 $f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{y})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

证明. 设 $\mathbf{z} \in V$. 只要证明:

$$\mathbf{z} = \mathbf{0} \iff f_1(\mathbf{z}) = \cdots = f_n(\mathbf{z}) = \mathbf{0}.$$

"$\Longrightarrow$" 是显然的.

“$\Longleftarrow$”. 假设 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. 由线性映射基本定理 II 可知, 存在 $f \in V^*$ 使得 $f(\mathbf{z}) = 1$. 因为 $f_1, \ldots, f_n$ 是 V^* 的基底, 所以存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得 $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. 于是, $f(\mathbf{z}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right)(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. 矛盾. □

定理 6.4 下列映射

$$\begin{aligned} \phi\colon\ V &\longrightarrow V^{**} \\ \mathbf{v} &\mapsto \epsilon_{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

是线性同构, 其中

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mathbf{v}}\colon\ V^* &\longrightarrow F \\ f &\mapsto f(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

证明. 先验证 $\epsilon_{\mathbf{v}} \in V^{**}$. 设 $\alpha, \beta \in F$, $f, g \in V^*$. 则

$$\epsilon_{\mathbf{v}}(\alpha f+\beta g) = (\alpha f+\beta g)(\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})+\beta g(\mathbf{v}) = \alpha\epsilon_{\mathbf{v}}(f)+\beta\epsilon_{\mathbf{v}}(g).$$

验证完毕. 于是 ϕ 是良定义的.

再验证 ϕ 是线性的. 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\alpha, \beta \in F$. 则对任意的 $f \in V^*$,

$$\epsilon_{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}}(f) = f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u})+\beta f(\mathbf{v}) = \alpha\epsilon_{\mathbf{u}}(f)+\beta\epsilon_{\mathbf{v}}(f).$$

于是 $\epsilon_{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}} = \alpha\epsilon_{\mathbf{u}} + \beta\epsilon_{\mathbf{v}}$, 即 $\phi(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v})$.

最后, 我们验证 ϕ 时双射. 由定理 6.1 可知, $\dim(V^{**})=n$. 因为 $\mathrm{im}(\phi) \subset V^{**}$ 且 $\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$. 我们

只要验证 $\ker(\phi)=\{\mathbf{0}\}$ 即可. 设 $\phi(\mathbf{v})=\mathbf{0}^{**}$, 其中 $\mathbf{0}^{**}$ 代表 V^{**} 中的零元. 则对任意的 $f\in V^*$, $f(\mathbf{v})=0$. 由引理 6.3 可知, $\mathbf{v}=\mathbf{0}$. □

上述定理中的线性同构 ϕ 的定义与基底无关, 此时我们说 V 与 V^{**} 自然同构.

6.2 应用

例 6.5 设 $U\subset F^4$ 由向量

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad \text{和} \quad \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

生成. 求行数最小的矩阵 A 使得 U 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解.

解. 设所求矩阵为 A. 可直接验证 $\dim(U)=2$. 于是 A 有两行且这两行线性无关. 设 A 中的一行是 (x_1,x_2,x_3,x_4). 则它是方程组

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1^t\\ \mathbf{u}_2^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

的解. 解空间的基给出我们所需要的向量. 具体方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

它的两个线性无关解是设 $U \subset F^4$ 由向量

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^t \\ \mathbf{x}_2^t \end{pmatrix}.$$

例 6.6 设 $U = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$ 和 $W = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m \rangle$ 是 F^n 的两个子空间. 同时它们分别是 $A \in F^{\ell \times n}$ 和 $B \in F^{s \times n}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间. 则 $U + W$ 的一组生成元是 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$. 但构造矩阵 C 使得 $U + W$ 是以 C 为矩阵的齐次线性方程组的解空间就不那么直接. 类似地, 构造 $U \cap W$ 的生成元比较麻烦, 但以

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间等于 $U \cap W$.

设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V$ 和 $f_1, \ldots, f_k \in V^*$. 令

$$M \begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_k \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix} = (f_i(\mathbf{v}_j))_{k \times \ell}.$$

引理 6.7 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V$ 和 $f_1, \ldots, f_k \in V^*$. 再设

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_\ell \mathbf{v}_\ell.$$

则

$$\begin{pmatrix} f_1(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ f_k(\mathbf{v}) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_k \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{pmatrix}.$$

证明. 等式左侧第 i 行是 $f_i(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j f_i(\mathbf{v}_j)$. 它恰好是等式右边的第 i 行, $i = 1, 2, \ldots, k$. $\square$

引理 6.8 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V$. 则下列断言等价:

(i) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$ 线性相关;

(ii) 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, $f_1, \ldots, f_k \in V^*$,

$$\operatorname{rank}\left(M \begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_k \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix} \right) < \ell.$$

(iii) 设 $g_1, \ldots, g_n$ 是 V^* 的一组基,

$$\operatorname{rank}\left(M \begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix} \right) < \ell.$$

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii). 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in F$ 不全为零使得

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_\ell \mathbf{v}_\ell = \mathbf{0}.$$

由引理 6.7,

$$M\begin{pmatrix} f_1, & \dots, & f_k \\ \mathbf{v}_1, & \dots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ 不全为零, 所以上述方程组的系数矩阵不可能列满秩.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 显然.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 由 (iii) 中矩阵秩的条件可知, 存在 $\beta_1, \dots, \beta_\ell \in F$ 不全为零使得

$$M\begin{pmatrix} g_1, & \dots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \dots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

令 $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_\ell\mathbf{v}_\ell$. 由引理 6.7 可知, $g_i(\mathbf{v}) = 0 = g_i(\mathbf{0})$, $i = 1, 2, \dots, n$. 于是 $\mathbf{v} = 0$ (见引理 6.3). (i) 成立. □

定理 6.9 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell \in V$ 和 $g_1, \dots, g_n \in V^*$ 是一组基. 则

$$\dim\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle = \operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} g_1, & \dots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \dots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\right).$$

证明. 设

$$r = \operatorname{rank}\left(M\begin{pmatrix} g_1, & \dots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \dots, & \mathbf{v}_\ell \end{pmatrix}\right).$$

不妨设该矩阵中前 r 列线性无关. 我们只要证明 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ 是 $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \rangle$ 的一组基即可.

注意到这前 r 列组成的子矩阵

$$M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_r \end{pmatrix}$$

的秩等于 r, 由引理 6.8, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ 线性无关. 设 $j \in \{r+1, r+2, \ldots, \ell\}$. 则子矩阵

$$M\begin{pmatrix} g_1, & \ldots, & g_{n-1} & g_n \\ \mathbf{v}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_r & \mathbf{v}_j \end{pmatrix}$$

的秩仍等于 r, 故秩小于 $r+1$. 再由引理 6.8, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_j$ 线性相关. 于是 $\mathbf{v}_j \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$. 由此可知 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ 是 $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \rangle$ 的一组基. $\square$

7 双线性型

本节中 V 是 F 上的 n 维线性空间, $n > 0$.

7.1 定义和矩阵表示

设

$$\begin{aligned} f: V \times V &\longrightarrow F \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

如果对任意的 $\alpha, \beta \in F$ 和 $\mathbf{z} \in V$ 满足

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

和

$$f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

则称 f 是 V 上的双线性型.

例 7.1 设 f 是 V 上的双线性型. 则对任意的 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 和 $\alpha, \beta \in F$, 我们有:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f(\mathbf{u}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{v} + \mathbf{y}) \end{aligned}$$

且

$$f(\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}) = \alpha\beta f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

此外

$$f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \implies f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = 0.$$

同理, $f(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$.

定理 7.2 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, f 是 V 上的双线性型. 则存在唯一的矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 使得,

$$\forall\ \mathbf{x} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

我们有

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

事实上, $A = (f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j))_{n\times n}$. 称 A 是 f 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵表示.

证明. 我们计算

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i,\ \sum_{j=1}^n y_j\mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f\left(\mathbf{e}_i,\ \sum_{j=1}^n y_j\mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i\left(\sum_{j=1}^n y_j f(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)x_i y_j. \end{aligned}$$

令 $A = (f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j))_{n\times n}$. 由上式直接验证得

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

再设 $B=(b_{i,j})\in \mathrm{M}_n(F)$ 使得

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\dots,x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

对 $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, 取 $\mathbf{x}=\mathbf{e}_i,\mathbf{y}=\mathbf{e}_j$, 则

$$f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=\Big(0,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{1},\dots,0\Big)\ B\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\to j=\vec{B}_i\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\to j=b_{i,j}.$$

于是 $A=B$. $\square$

例 7.3 设 $V=\mathbb{R}^2$. 对任意的

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\quad f(\mathbf{x},\mathbf{y}):=\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}.$$

验证 f 是 V 上的双线性型, 并求它在标准基下的矩阵.

解. 设 $\alpha,\beta\in F,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$,

$$\begin{aligned}f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z},\mathbf{y})&=\det(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z},\mathbf{y})=\det(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})+\det(\beta\mathbf{z},\mathbf{y})\\&=\alpha\det(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta\det(\mathbf{z},\mathbf{y})=\alpha f(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{z},\mathbf{y}).\end{aligned}$$

类似 f 对第二个变元线性. 于是 f 是双线性型.

注意到 $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)=f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)=0$, $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=1$ 而 $f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)=-1$. 于是

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,x_2)\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}.$$

设 f 是 V 上的双线性型, f 在 V 的两组基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B. 再设

$$(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P,\quad P\in\mathrm{GL}_n(F).$$

设 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n=u_1\epsilon_1+\cdots+u_n\epsilon_n$, $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_n\mathbf{e}_n=v_1\epsilon_1+\cdots+v_n\epsilon_n$. 则由坐标变换公式可得

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x},\mathbf{y})&=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\\&=(u_1,\ldots,u_n)\underbrace{P^tAP}_{B}\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

根据定理 7.2, $B=P^tAP$. 反之, 给定 F^n 的一组基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$, f 在给定基底下的矩阵是 A, 则 $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P$ 是 F^n 的一组基. 由上述计算可知 f 在新的基底下的矩阵是 P^tAP.

定义 7.4 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(F)$. 如果存在 $P\in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B=P^tAP$, 则称 B 合同于 A, 记为 $B\sim_c A$.

我们来验证 $\sim_c$ 是等价关系. 对任意 $A\in \mathrm{M}_n(F)$, $A=E^tAE \implies A\sim_c A$. 自反性成立. 设 $B\sim_c A$. 则存在 $P\in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B=P^tAP$. 于是

$$A=(P^t)^{-1}BP^{-1}=(P^{-1})^tBP^{-1} \implies A\sim_c B.$$

对称性成立. 设 $A\sim_c B$, $B\sim_c C$. 则存在 $P,Q\in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$\begin{aligned}
&A=P^tBP,\ B=Q^tCQ\\
&\quad\implies A=P^tQ^tCQP=(QP)^tC(QP)\\
&\quad\implies A\sim_c C.
\end{aligned}$$

传递性成立.

从以上论述我们看出, 一个双线性型在不同基底下的矩阵是合同的. 而两个彼此合同的矩阵一定是一个双线性型在不同基底下的矩阵. 于是, 研究双线性型等价于研究方阵在合同意义下的等价类. 利用矩阵的语言, 我们所要研究的问题是: $\mathrm{M}_n(F)/\sim_c$ 含有多少不同的等价类？在每个等价类中可否找出一个“标准” 的代表元? 这个代表矩阵中应该含有尽可能多个 0, 而非零元素出现的位置应该尽可能有规律.

命题 7.5 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 若 $A \sim_c B$, 则 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

证明. 设 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $A = P^t B P$. 因为 P 满秩, 所以 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$. (见上学期讲义第二章推论 4.3) $\square$.

定义 7.6 设 f 是 V 上的双线性型, A 是 f 在 V 的某组基下的矩阵. 则 f 的秩定义为 $\mathrm{rank}(A)$, 记为 $\mathrm{rank}(f)$.

由上述命题可知, $\mathrm{rank}(f)$ 是良定义的. 下例说明双线性型可以通过矩阵给出.

例 7.7 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 则

$$
\begin{array}{cccc}
f: & F^n \times F^n & \longrightarrow & F \\
 & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} & \mapsto & (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
\end{array}
$$

是 F^n 上的双线性型, f 在标准基下的矩阵是 A.

证明. 设 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t, \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^t$, $\alpha, \beta \in F$. 则

$$
\begin{aligned}
f(\alpha \mathbf{x} + \beta z, y) &= (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{z})^t A \mathbf{y} \\
&= \alpha(\mathbf{x}^t A \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{z}^t A \mathbf{y}) \\
&= \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{z}, \mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

于是, f 对第一个变元线性. 类似可验证 f 对第二个变元也线性. 从而 f 是双线性型. 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 F^n 的标准基, $A=(a_{i,j})_{n\times n}$. 则 $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=a_{i,j}$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$. 由定理 *7.2*, f 在标准基下的矩阵是 A. $\square$

定义 7.8 设 f 是 V 上的双线性型. 如果对任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=f(\mathbf{y},\mathbf{x})$, 则称 f 是对称的. 如果对任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$, $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=-f(\mathbf{y},\mathbf{x})$, 则称 f 是斜对称的.

例 7.9 设 V 的基是 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$, V 上的双线性型 f 在该基下的矩阵是 A. 证明 A *(*斜*)*对称当且仅当 f *(*斜*)*对称.

证明. 设 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_n\mathbf{e}_n$. 则

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\quad \text{和}\quad f(\mathbf{y},\mathbf{x})=(y_1,\ldots,y_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}. \tag{1}$$

注意到 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})\in F \implies f(\mathbf{x},\mathbf{y})^t=f(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

如果 $A=A^t$, 则 (1) 蕴含 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=f(\mathbf{y},\mathbf{x})$. 反之, 设 f 对称. 则 $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=f(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i), i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$. 由定理 *7.2* 可知, A 对称. 类似地, 可证明斜对称情形的结论.

例 7.10 合同关系保持对称和斜对称性. 设 $A\in \mathrm{M}_n(F)$ *(*斜*)*对称, 且 $A\sim_c B$. 证明 B 也*(*斜*)*对称.

证明. 设 A 斜对称. 因为 $A \sim_c B$, 所以存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^t AP$. 则 $B^t = (P^t AP)^t = P^t A^t P = -P^t AP = -B$. 对称情形类似. □

7.2 对称双线性型

本节的主要结果是

定理 7.11 设 F 的特征不等于 2 且 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 则 V 中有一组基使得 f 在该基下的矩阵是对角阵.

证明该定理需要对称双线性型的极化公式. 设 F 的特征不等于 2 且 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 则对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right). \qquad (2)$$

验证如下:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right) && \text{(双线性)} \\
&= \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})\right) \\
&= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). && \text{(对称性)}
\end{aligned}$$

定理 7.11 的证明. 如果 f 是零映射, 则 f 在 V 的任意基底下的矩阵都是零矩阵. 定理显然成立. 设 f 不是零映射.

再设 $n=\dim(V)$. 我们对 n 归纳. 当 $n=1$ 时, 定理显然成立. 设 $n>1$ 且定理对 $n-1$ 成立.

由极化公式 (2), 存在 $\mathbf{e}_1 \in V$ 使得 $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)\neq 0$. 令 $W=\{\mathbf{v}\in V \mid f(\mathbf{v},\mathbf{e}_1)=0\}$. 可直接验证 W 是子空间. 我们来证明

$$V=\langle \mathbf{e}_1\rangle \oplus W. \tag{3}$$

首先, 设 $\mathbf{x}\in\langle \mathbf{e}_1\rangle\cap W$. 则 $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{e}_1$, 其中 $\lambda\in F$, 且 $f(\lambda\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)=0$. 于是 $\lambda f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)=0$. 因为 $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)\neq 0$, 所以 $\lambda=0 \implies \mathbf{x}=\mathbf{0}$. 由第一章第一讲定理 1.12 (iii), $\langle \mathbf{e}_1\rangle+W$ 是直和. 由第一章第二讲命题 4.15, 只要证明 $\dim(W)=n-1$ 即可. 考虑线性映射

$$\begin{aligned}\phi\colon V &\longrightarrow F\\ \mathbf{x} &\mapsto f(\mathbf{x},\mathbf{e}_1).\end{aligned}$$

则 $W=\ker(\phi)$. 因为 $\phi(\mathbf{e}_1)\neq 0$, 所以 $\dim(\mathrm{im}(\phi))\geq 1$. 但 $\mathrm{im}(\phi)\subset F$ 且 $\dim F=1$. 于是 $\mathrm{im}(\phi)=F$. 特别地 $\dim(\mathrm{im}(\phi))=1$. 由对偶公式, $\dim(W)=n-1$. 直和分解 (3) 成立.

设 $g\in\mathcal{L}_2(W)$ 满足对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in W$, $g(\mathbf{x},\mathbf{y})=f(\mathbf{x},\mathbf{y})$. 由归纳假设存在 W 的一组基 $\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 使得 g 在该基下的矩阵是对角的, 即对任意的 $i,j\in\{2,3,\ldots,n\}, i\neq j$, 我们有 $g(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=0$. 由 (3), $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 线性无关 (见第一章第一讲定理 1.12 (ii))且 $\dim(V)=n$. 于是

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 由 W 的定义可知

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

在由 f 的对称性可知

$$f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

综上所述 $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 且 $i \neq j$. 于是 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵是对角阵. □

定义 7.12 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$, f 在 V 的基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵是对角阵. 则称 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 f 的一组规范基. 设双线性型 f 在一组规范基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 则

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda_1 x_1 y_1 + \cdots + \lambda_n x_n y_n$$

称为与规范基对应的规范型, 其中 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$.

推论 7.13 设 F 的特征不等于 2, $A \in \mathrm{SM}_n(F)$. 则 A 合同于一个对角阵.

证明. 考虑双线性型

$$\begin{array}{cccc} f: & F^n \times F^n & \longrightarrow & F \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{array}$$

因为 A 对称, 所以 f 对称. 由上述定理存在 F^n 的一组基使得 f 在该基下的矩阵是对角阵 B. 则 $A \sim_c B$. $\square$

例 7.14 求 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} P$$

是对角矩阵.

解. 设 f 是 $\mathbb{R}^3$ 上对称双线性型, 它在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的矩阵是 A.

步骤 1. 选取 ϵ_1 使得 $f(\epsilon_1, \epsilon_1) \neq 0$. 令 $\epsilon_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. 则

$$\begin{aligned} f(\epsilon_1, \epsilon_1) &= f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ &= f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 2. \end{aligned}$$

步骤 2. 确定 $W = \ker(f(\mathbf{x}, \epsilon_1))$ 的一组基. 我们计算

$$f(\mathbf{x}, \epsilon_1) = (x_1, x_2, x_3)A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = x_1 + x_2 + 2x_3.$$

解方程 $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ 得到 W 的一组基

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

步骤 3. 求 $g := f|_{W\times W}$ 在 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 下的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) & f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \\ f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) & f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

到此降维到 W 上的对称双线性型 g.

步骤 1. 选取 ϵ_2 使得 $g(\epsilon_2, \epsilon_2) \neq 0$. 令 $\epsilon_2 = \mathbf{w}_1$.

步骤 2. 确定 $Z = \ker(g(\mathbf{x}, \epsilon_2))$ 的一组基. 我们计算

$$g(\mathbf{y}, \epsilon_2) = (y_1, y_2) B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2y_1 - 2y_2.$$

解方程 $-2y_1 - 2y_2 = 0$ 得到解空间的一组基

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow Z \text{ 的基是 } (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

于是, f 在 $\mathbb{R}^3$ 中的一组规范基是

$$\epsilon_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2 = \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

从 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 到 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 的矩阵是

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算得

$$P^t A P = \mathrm{diag}(2, -2, -2).$$