第一章 空间与形式

推论 3.4 利用上次定理 *3.3* 的假设和符号, 再设 ϕ 是满射. 则 $V/\ker(\phi)$ 和 W 线性同构.

证明. 由上述定理直接可得. □

推论 3.5 设 V_1, V_2 是 V 的子空间. 则 $V_2/(V_1 \cap V_2)$ 和 $(V_1 + V_2)/V_1$ 线性同构.

证明. 设 $\phi : V_2 \longrightarrow V_1 + V_2$ 是嵌入, $\pi : V_1 + V_2 \longrightarrow (V_1 + V_2)/V_1$ 是自然投射. 则 $\psi = \pi \circ \phi$ 是从 V_2 到 $(V_1 + V_2)/V_1$ 的线性映射. 注意到任意 $(V_1 + V_2)/V_1$ 中的元素都可以表示为 $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + V_1$, 其中 $\mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2$, 且

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + V_1 = (\mathbf{v}_1 + V_1) + (\mathbf{v}_2 + V_2) = (\mathbf{0} + V_1) + (\mathbf{v}_2 + V_1) = \mathbf{v}_2 + V_1.$$

于是, 任何 $(V_1 + V_2)/V_1$ 中的元素都可以表示为 $\mathbf{v}_2 + V_1$. 我们推导:

$$\psi(\mathbf{v}_2) = \pi \circ \phi(\mathbf{v}_2) = \pi(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 + V_1.$$

于是 ψ 是满射. 若 $\mathbf{v}_2 \in V_1 \cap V_2$, 则 $\mathbf{v}_2 + V_1 = V_1$. 由此可知, $V_1 \cap V_2 \subset \ker(\psi)$. 反之, 设 $\mathbf{v}_2 \in \ker(\psi)$. 则 $\psi(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 + V_1 = V_1$. 于是, $\mathbf{v}_2 \in V_1 \cap V_2$. 从而 $\ker(\psi) = V_1 \cap V_2$. 由推论 3.4, 这两个商空间线性同构. □

上述证明可以用下列交换图简洁地表示.

$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_{\ker(\psi)}"'] \arrow[dr, "\psi"] & V_1+V_2 \arrow[d, "\pi"] \\ V_2/\ker(\psi) \arrow[r, "\bar{\psi}"'] & (V_1+V_2)/V_1 \end{tikzcd} \quad \text{且} \quad \ker(\psi)=V_1\cap V_2.$$

推论 3.6 设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 且 V_1+V_2 是直和. 则 $(V_1+V_2)/V_1$ 和 V_2 线性同构.

证明. 由推论 3.5, $(V_1+V_2)/V_1$ 与 $V_2/\{\mathbf{0}\}$ 线性同构. 设 $\phi: V_2 \longrightarrow V_2$ 是恒同映射. 由推论 3.4, V_2 与 $V_2/\{\mathbf{0}\}$ 线性同构. 由此可知, $(V_1+V_2)/V_1$ 与 V_2 线性同构. □

4 基底与维数

在本节中 V 是域 F 上的线性空间.

4.1 极大线性无关集

定义 4.1 设 $S \subset V$ 是非空集. 如果 S 中任意有限多个元素都线性无关, 则称 S 是线性无关集. 设 $M \subset S$ 是线性无关集. 如果对任意 $\mathbf{v} \in S$, $\mathbf{v} \in \langle M \rangle$, 即 $S \subset \langle M \rangle$, 则称 M 是 S 中的一个极大线性无关集.

例 4.2 设 $S = \{x, x^3, 2x^3+x\} \subset \mathbb{Q}[x]$. 求 S 中所有的极大线性无关组.

解. 注意到次数两两不同的多项式组成的集合是线性无关的. 子集 $S_1 = \{x, x^3\}$ 是线性无关组. 这是因为 $2x^3 + x = 2x^3 + x$. 子集 $S_2 = \{x, 2x^3 + x\}$ 是极大线性无关组. 这是因为 $x^3 = (1/2)(2x^3 + x) - (1/2)x$. 而 $S_3 = \{2x^3 + x, x^3\}$ 也是极大线性无关组. 这是因为 $\alpha(2x^3 + x) + \beta x^3 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ 蕴含着 $\alpha = 0$, 从而 $\beta = 0$. 故 S_3 是线性无关集. 再注意到 $x = (2x^3 + x) - 2x^3$ 即可.

线性空间中的任何含有非零向量的子集都有极大线性无关集. 但证明这一结论需要 Zorn 引理(超限归纳法). 今后我们主要关心有限生成的线性空间.

命题 4.3 设 $S \subset V$ 是非空集. 设 $T \subset S$ 是线性无关集. 再设 $V = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$. 则下述断言成立.

(i) *(可扩充)* S 中有极大线性无关集 M 包含 T, 且 $\mathrm{card}(M) \le k$.

(ii) *(等势)* 设 M 和 N 是 S 中两个极大线性无关集. 则 $\mathrm{card}(M) = \mathrm{card}(N)$.

(iii) *(表示唯一)* 设 $M = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\} \subset S$. 则 M 是 S 中的极大线性无关集当且仅当对任意的 $\mathbf{v} \in S$, 存在唯一的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in F$ 使得 $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_s \mathbf{w}_s$.

证明. (i) 和 (ii) 见上学期第二章第二讲命题 2.3. (iii) 是上学期第二章第一讲命题 1.11 (iv) 的直接推论. □

4.2 基底和维数

定义 4.4 线性空间 V 的极大线性无关组称为 V 一组基.

如果 V 的极大线性无关组 B 有限, 则 V 的维数定义为 $\mathrm{card}(B)$. 否则 V 的维数定义为 ∞. 如果 $V = \{\mathbf{0}\}$, 其维数定义为 0. 线性空间 V 的维数记为 $\dim_F(V)$ 或 $\dim(V)$.

根据命题 4.3, 线性空间的维数是良定义的.

定义 4.5 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 对任意的 $\mathbf{x} \in V$, 存在唯一的 $x_1, \ldots, x_n \in F$ 使得

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

称 $(x_1, \ldots, x_n)^t$ 是 $\mathbf{x}$ 在基底 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的坐标.

坐标的存在唯一性由命题 4.3 (iii) 可得.

例 4.6 *(坐标空间)* F^n 的标准基

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\dim(F^n) = n$.

例 4.7 *(矩阵空间)* 设 $E_{i,j} \in F^{m\times n}$, 其中在 i 行 j 列处的元素是 1, 而其它处的元素是 0, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2\ldots,n$. 则 $\{E_{i,j}\,|\,i \in \{1,2,\ldots,m\}, j \in \{1,2\ldots,n\}\}$ 是 $F^{m\times n}$ 的一组基. 于是 $\dim F^{m\times n} = mn$. 下面我们证明 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的一组基是

$$S = \{E_{i,i}\,|\,i = 1,2,\ldots,n\} \cup \{E_{i,j}+E_{j,i}\,|\,i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, i \neq j\}.$$

证明. 可直接验证 $S \subset \mathrm{SM}_n(F)$. 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{SM}_n(F)$. 则 $a_{i,j} = a_{j,i}$. 于是

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}).$$

如果

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} b_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) = O,$$

其中 $b_{i,i}, b_{i,j} \in F$. 可直接验证所有的 $b_{i,i} = 0$, $b_{i,j} = 0$. 于是 S 是 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的一组基. □

从而 $\dim(\mathrm{SM}_n(F)) = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

例 4.8 *(代数空间)* $F[x]$ 的一组基是 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. 于是 $\dim F[x] = \infty$. 子空间 $F[x]^{(d)}$ 的一组基是$\{1, x, \ldots, x^{d-1}\}$, 其维数是 d. 此外, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. 这是因为

$$\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1}\,|\,a, b \in \mathbb{R}\}.$$

但 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ *(证明需要其它数学知识)*.

例 4.9 因为当 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 两两不同时, $e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_k x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 所以由 k 的任意性可知, $\dim \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$.

定理 4.10 *(基扩充定理)* 设 V 是有限维线性空间. 如果 $S \subset V$ 是线性无关集, 则存在 V 的基底 T 使得 $S \subset T$.

证明. 因为 V 是有限维的, 所以它是有限生成的. 由基底的定义和命题 4.3 直接推出定理. □

定理 4.11 *(线性映射基本定理 II)* 设 V 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, W 是 F 上的线性空间且 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in W$. 则存在唯一的线性映射 $\phi : V \longrightarrow W$ 使得

$$\phi(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \ldots, \phi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n.$$

证明. 见上学期第二章第三讲定理 5.9 的证明. □

定理 4.12 设 V, W 是 F 上的有限维线性空间. 则 V 和 W 线性同构当且仅当 $\dim(V) = \dim(W)$. 特别地, 当 $\dim_F(V) = n$ 时, V 和 F^n 线性同构.

证明. 设 $\dim(V) = \dim(W) = n$. 令 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 分别是 V 和 W 的基底. 由定理 4.11 存在线性映射 $\phi : V \longrightarrow W$ 和 $\psi : W \longrightarrow V$ 使得 $\phi(\mathbf{v}_i) = (\mathbf{w}_i)$ 和 $\psi(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 于是, $\psi \circ \phi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 由定理

4.11 的唯一性可知 $\psi \circ \phi$ 是 V 上的恒同映射. 同理, $\phi \circ \psi$ 是 W 上的恒同映射. 于是, ϕ 是线性同构.

反之, 设 V 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性同构. 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_1\phi(\mathbf{v}_1)+\cdots+\alpha_n\phi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W \implies \phi(\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W.$$

因为 ϕ 是单射, 所以 $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V$. 于是,

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \implies \phi(\mathbf{v}_1), \ldots \phi(\mathbf{v}_n) \text{ 线性无关.}$$

由定理 4.10 可知, $\dim(W) \geq \dim(V)$. 同理 $\dim(V) \geq \dim(W)$. 于是, $\dim(V) = \dim(W)$. □

4.3 若干维数公式

在本小节中, V 是有限维线性空间.

引理 4.13 设 U 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U). \tag{1}$$

证明. 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是 U 的一组基. 由定理 4.10 可知，存在 $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ 使得 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 下面我们来证明 $\mathbf{v}_{k+1} + U, \ldots, \mathbf{v}_n + U$ 是 V/U 的一组基. 首先, 设 $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1} + U) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{v}_n + U) = U.$$

则 $(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots\alpha_n\mathbf{v}_n)+U=U$. 即 $(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots\alpha_n\mathbf{v}_n)\in U$. 换言之, 存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in F$ 使得

$$\begin{aligned}&\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n\\&=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k\\&\Longrightarrow\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k+(-\alpha_{k+1})\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+(-\alpha_n)\mathbf{v}_n=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 线性无关, 所以

$$\alpha_{k+1}=\cdots=\alpha_n=0.$$

于是, $\mathbf{v}_{k+1}+U,\ldots,\mathbf{v}_n+U$ 线性无关. 再设 $\mathbf{v}+U\in V/U$, 其中 $\mathbf{v}\in V$. 则存在 $\beta_1,\ldots,\beta_n\in V$ 使得

$$\mathbf{v}=\underbrace{\beta_1\mathbf{v}_1+\cdots+\beta_k\mathbf{v}_k}_{\mathbf{x}}+\underbrace{\beta_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+\beta_n\mathbf{v}_n}_{\mathbf{y}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbf{v}+U&=\mathbf{x}+\mathbf{y}+U\\&=(\mathbf{x}+U)+(\mathbf{y}+U)&&\text{(商空间中的运算)}\\&=U+(\mathbf{y}+U)&&(\mathbf{x}\in U)\\&=\mathbf{y}+U&&(U\text{ 是 }V/U\text{ 中的零})\\&=\beta_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1}+U)+\cdots+\beta_n(\mathbf{v}_n+U).&&\text{(商空间中的运算)}\end{aligned}$$

由此可知, $\mathbf{v}_{k+1}+U,\ldots,\mathbf{v}_n+U$ 是 V/U 的一组基. 从而 $\dim(V/U)=n-k$. □

命题 4.14 *(i) 设 U 是 V 的子空间, 则 $U \neq V$ 当且仅当 $\dim(U) < \dim(V)$.*

(ii) 设 V_1, V_2 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

(iii) 设 $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性映射. 则

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = \dim(V).$$

证明. (i) (方法1) 见上学期第二章第二讲命题 2.13.

(方法2)

$$\dim(U) < \dim(V) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \dim(V/U) > 0 \Longleftrightarrow V/U \neq \{U\} \Longleftrightarrow U \subsetneq V.$$

(ii) (方法1) 见上学期第二章第二讲命题 2.14.

(方法2) 由上周讲义推论 3.7 和 定理 4.12,

$$\begin{aligned} & \dim((V_1 + V_2)/V_1) = \dim(V_2/(V_1 \cap V_2)) \\ & \overset{(1)}{\Longrightarrow} \dim(V_1 + V_2) - \dim(V_1) = \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2). \end{aligned}$$

(iii) (方法1) 见上学期第二章第三讲定理 5.14.

(方法2) 由线性映射基本定理I和定理 4.12,

$$\dim(V/\ker(\phi)) = \dim(\mathrm{im}(\phi)) \overset{(1)}{\Longrightarrow} \dim(V) - \dim(\ker(\phi)) = \dim(\mathrm{im}(\phi)).$$

命题 4.15 设 $V_1, \ldots, V_k$ 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1 + \cdots + V_k) \leq \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_k).$$

等号成立当且仅当 $V_1 + \cdots + V_k$ 是直和.

证明. 我们对 k 归纳证明不等式. 当 $k = 1$ 时不等式显然成立. 设 $k > 1$ 且不等式对 $k - 1$ 成立. 则

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1 + V_2 + \cdots + V_k) \\
&= \dim(V_1) + \dim(V_2 + \cdots + V_k) \\
&- \dim(V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k)) \quad (\text{命题 } 4.14 \text{ (ii)}) \\
&\leq \dim(V_1) + \dim(V_2 + \cdots + V_k) \\
&\leq \dim(V_1) + \dim(V_2) + \cdots + \dim(V_k). \quad (\text{归纳假设})
\end{aligned}$$

设 $V_1 + \cdots + V_k$ 是直和. 对 k 归纳. 当 $k = 1$ 时显然. 设 $k > 1$ 且 $k - 1$ 时结论成立.

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1 + V_2 + \cdots + V_k) \\
&= \dim(V_1) + \dim(V_2 + \cdots + V_k) \\
&\quad - \dim(V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k)) && (\text{命题 } 4.14 \text{ (ii)}) \\
&= \dim(V_1) + \dim(V_2 + \cdots + V_k) && (\text{定理 } 1.12 \text{ (iii)}) \\
&= \dim(V_1) + \dim(V_2) + \cdots + \dim(V_k). && (\text{归纳假设})
\end{aligned}$$

反之, 设 $\dim(V_1 + \cdots + V_k) = \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_k)$. 我们要证明 $V_1 + \cdots + V_k$ 是直和. 假设不是直和. 由定理 1.12

(iii), 存在 $i \in \{1, \dots, k\}$ 使得

$$V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_n) \neq \{\mathbf{0}\}.$$

不妨设 $i = 1$. 则

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1 + V_2 + \cdots + V_k) \\
&= \dim(V_1) + \dim(V_2 + \cdots + V_k) \\
&- \dim(V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k)) \quad (\because \text{命题 } 4.14 \text{ (ii)}) \\
&< \dim(V_1) + \dim(V_2 + \cdots + V_k) \quad (\because V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k) \neq \{\mathbf{0}\}) \\
&\leq \dim(V_1) + \dim(V_2) + \cdots + \dim(V_k). \quad (\because \text{刚证的不等式})
\end{aligned}$$

矛盾. □

4.4 利用线性映射的核证明矩阵秩的不等式

核方法基本步骤如下:

1. 把矩阵解释为坐标空间的线性映射;
2. 利用对偶定理 $\dim(\ker(\phi_A)) + \operatorname{rank}(A) = n$ 把秩转换为核的维数;
3. 利用核空间的“包含”关系和线性映射基本定理 (I), 构造线性单射;
4. 利用线性单射保持原像空间的维数证明不等式.

例 4.16 设 $A \in F^{m\times s}$ 和 $B \in F^{s\times n}$. 证明:

$$\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - s.$$

证明. 设

$$\begin{array}{rccc} \phi_A: & F^s & \longrightarrow & F^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & A\mathbf{x} \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^s \\ & \mathbf{x} & \mapsto & B\mathbf{x}. \end{array}$$

则

$$\begin{array}{rccc} \phi_A \circ \phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & AB\mathbf{x}. \end{array}$$

故 $\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$.

设 $K_A = \ker(\phi_A)$, $K_B = \ker(\phi_B)$ 和 $K_{AB} = \ker(\phi_{AB})$. 令 $d_A = \dim(K_A)$, $d_B = \dim(K_B)$ 和 $d_{AB} = \dim(K_{AB})$. 则

$$d_A + \operatorname{rank}(A) = s, \quad d_B + \operatorname{rank}(B) = n, \quad d_{AB} + \operatorname{rank}(AB) = n.$$

故要证明的不等式等价于

$$n - d_{AB} \geq s - d_A + n - d_B - s \iff d_A + d_B \geq d_{AB}.$$

注意到 $K_B \subset K_{AB} \subset F^n$. 定义:

$$\begin{array}{rccc} \rho: & K_{AB} & \longrightarrow & K_A \\ & \mathbf{x} & \mapsto & B\mathbf{x}. \end{array}$$

注意到 $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}_m$ 蕴含 $B\mathbf{x} \in K_A$. 故上述线性映射是良定义的. 显然 $K_B = \ker(\rho)$. 根据线性映射基本定理 I, 存在线性单射 $\bar{\rho}: K_{AB}/K_B \longrightarrow K_A$.

因为 $\bar{\rho}$ 是单射, 所以

$$\dim(K_{AB}/K_B) = \dim(\mathrm{im}(\bar{\rho})) \leq d_A.$$

根据引理 4.13, $d_{AB} - d_B \leq d_A \Longrightarrow d_{AB} \leq d_A + d_B$. $\square$

例 4.17 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $AB = BA$. 证明:

$$\mathrm{rank}(A+B) + \mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$

证明. 设

$$\begin{array}{rccc} \phi_A: & F^n & \longrightarrow & F^n \\ & \mathbf{x} & \mapsto & A\mathbf{x} \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^n \\ & \mathbf{x} & \mapsto & B\mathbf{x}. \end{array}$$

则

$$\begin{array}{rccc} \phi_A \circ \phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & AB\mathbf{x}. \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \phi_A + \phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & (A+B)\mathbf{x}. \end{array}$$

故 $\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$ 且 $\phi_A + \phi_B = \phi_{A+B}$.

设 $K_A = \ker(\phi_A)$, $K_B = \ker(\phi_B)$, $K_{AB} = \ker(\phi_{AB})$ 和 $K_{A+B} = \ker(\phi_{A+B})$. 令 $d_A = \dim(K_A)$, $d_B = \dim(K_B)$, $d_{AB} = \dim(K_{AB})$ 和 $d_{A+B} = \dim(K_{A+B})$. 则

$$d_A + \mathrm{rank}(A) = d_B + \mathrm{rank}(B) = d_{AB} + \mathrm{rank}(AB) = d_{A+B} + \mathrm{rank}(A+B) = n.$$

故要证明的不等式等价于

$$n - d_{A+B} + n - d_{AB} \leq n - d_A + n - d_B \iff d_A + d_B \leq d_{A+B} + d_{AB}.$$

由上例的推理可知: $K_B \subset K_{AB}$. 因为 $AB = BA$, 所以 $K_{AB} = K_{BA}$. 故 $K_A \subset K_{AB}$. 于是

$$K_A + K_B \subset K_{AB} \implies \dim(K_A + K_B) \leq d_{AB}.$$

再根据维数公式

$$d_A + d_B - \dim(K_A \cap K_B) \leq d_{AB} \implies d_A + d_B \leq d_{AB} + \dim(K_A \cap K_B).$$

于是, 只要证明 $\dim(K_A \cap K_B) \leq d_{A+B}$. 可直接验证

$$K_A \cap K_B \subset K_{A+B}.$$

故最后一个不等式显然成立. □

5 坐标变换和线性映射的矩阵表示

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

5.1 坐标变换

定理 5.1 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n \in V$. 则 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基当且仅当存在唯一的 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P. \tag{2}$$

(称 P 是从基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 到基底 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 的转换矩阵).

证明. 设 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得 (2) 成立. 若 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$ 使得

$$\alpha_1\mathbf{e}_1'+\cdots+\alpha_n\mathbf{e}_n'=\mathbf{0}.$$

则

$$(\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n')\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 线性无关, 所以

$$P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

因为 P 满秩, 所以 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$. 于是 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 线性无关. 因为 $\dim(V)=n$, 所以 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 是 V 的一组基.

反之, 设 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 是 V 的一组基. 因为 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, 所以存在 $P\in\mathrm{M}_n(F)$ 使得 (2) 成立. 我们首先证明 P 可逆. 否则, P 不满秩, 从而存在 $\beta_1,\ldots,\beta_n\in F$, 不全为零, 使得

$$P\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

由 (2),

$$\beta_1\mathbf{e}_1'+\cdots+\beta_n\mathbf{e}_n'=\mathbf{0},$$

即 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 线性相关. 矛盾. 于是 $P\in \mathrm{GL}_n(F)$. 再设 $Q\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n')=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)Q.$$

则 $(\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0})=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)(P-Q)$. 由 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 的线性无关性可知 $P-Q=O$, 即 $P=Q$. 唯一性成立. □

定理 5.2 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 是 V 的两组基, P 从第一组基到第二组的转换矩阵. 设 $\mathbf{x}\in V$ 在这两组基下的坐标分别是 $(x_1,\ldots,x_n)^t$ 和 $(x_1',\ldots,,x_n')^t$. 则

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证明. 我们计算

$$\mathbf{x}=(\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n')\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性可知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 5.3 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基. 证明

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

也是一组基. 设 $\mathbf{x} = (5,1)^t$. 求 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标.

证明. 通过矩阵表示, 我们有

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P}.$$

因为 A 可逆, 所以由定理 *5.1* 可知, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是基. 计算得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

再根据定理 *5.2*, $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标是

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 5.4 判断 $p_1 = x(x-1), p_2 = x(x-2), p_3 = x(x-2)+1$ 在 $F[x]^{(3)}$ 中 是不是一组基.

解. 因为 $p_1 = x^2 - x$, $p_2 = x^2 - 2x$, $p_3 = x^2 - 2x + 1$, 所以

$$(p_1, p_2, p_3) = (1, x, x^2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}.$$

因为 $\det(P) = 1 \neq 0$, 所以 A 可逆. 由定理 5.1, p_1, p_2, p_3 是一组基.

5.2 线性映射的矩阵表示

在本小节中 V 是 n 维线性空间, W 是 m 维线性空间. 它们具有共同的基域 F. 在设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 是 W 的一组基.

定理 5.5 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. 则存在唯一的 $A \in F^{m\times n}$ 使得对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, $\phi(\mathbf{x})$ 在 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的坐标是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3}$$

称 A 是 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m$ 下的矩阵表示.

证明. (存在性) 设

$$\phi(\mathbf{e}_j) = a_{1,j}\epsilon_1 + \cdots + a_{m,j}\epsilon_m,$$

$j = 1, 2, \ldots, n$. 令

$$A = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m}.$$

则 $\phi(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)\vec{A}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 于是,

$$(\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n)) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)A.$$

由此可知,

$$\phi(\mathbf{x}) = (\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性可知 (3) 成立.

(唯一性) 再设 $B \in F^{m\times n}$ 使得把 (3) 中 A 换成 B 后等式成立. 则对于任意 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\phi(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m)\vec{B}^{(j)}.$$

由坐标的唯一性可知 $\vec{B}^{(j)} = \vec{A}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 于是 $A = B$. $\square$

例 5.6 设 $f \in \mathrm{Hom}(V, F)$, 即 f 是 V 上的线性函数. 求 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 *1* 下的矩阵.

解. 设 $f(\mathbf{e}_j) = \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 则 f 在上述基底下的矩阵是 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, $f(\mathbf{x})$ 关于 1 的坐标和其本身相同. 于是

$$f(\mathbf{x}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

例 5.7 设 $\phi : \mathbb{R}[x]^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(n)}$ 是 d/dx. 求 ϕ 在 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 和 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 下的矩阵.

解. 注意到, $\phi(1)=0$, $\phi(x^k)=kx^{k-1}$, $k=1,2\dots,n-1$. 于是,

$$
\begin{aligned}
&(\phi(1),\phi(x),\phi(x^2),\dots,\phi(x^{n-1}))\\
&=(1,x,x^2,\dots,x^{n-1})\underbrace{\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}}_{A}.
\end{aligned}
$$